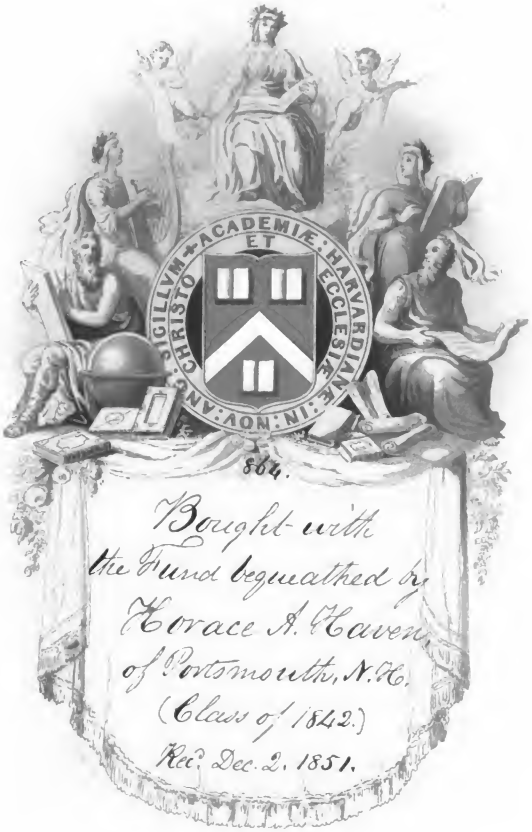
# HANDBUCH DER MATHEMATISCH EN ANALYSIS: IER THEIL

Oskar Xaver Schlömilch

Digitized by Google

Math 2668.45




SCIENCE CENTER LIBRARY

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

# Handbuch

der

# algebraischen Analysis

von

**Dr. Oskar Schlömilch,**
Privatdozent an der Universität zu Jena.

Mit zwei Kupfertafeln.

Jena,
Friedrich Frommann.

1845.

Digitized by Google

# Handbuch

der

# mathematischen Analysis

von

**Dr. Oskar Schlömilch,**
Privatdozent an der Universität zu Jena.

---

**Erster Theil:**

Algebraische Analysis.

---

Mit zwei Kupfertafeln.

---

Jena,
Friedrich Frommann.

1845.

Digitized by Google

Vol 2
Math 2668.45
1851 Sec 2
Bowen Fund

Jacob Sibley 864

Digitized by Google

# Vorrede zum ersten Theile.

Das Werk, welches ich hiermit dem mathematischen Publikum übergebe, hat einen doppelten Zweck: einerseits soll es als Leitfaden für akademische Vorlesungen dienen, aufserdem aber auch zum Selbststudium benutzt werden können. Bei der Ausarbeitung desselben hoffe ich, in keiner der genannten Beziehungen mich einer überflüssigen Mühe unterzogen zu haben. Denn es wird dem aufmerksamen Beobachter nicht entgangen sein, dafs in den letzten 20 Jahren, namentlich seit dem Erscheinen der Werke Cauchy's, eine neue Epoche in der Geschichte der Wissenschaft begonnen hat, eine Epoche, deren Eigenthümlichkeit in der Kritik der Methode besteht. Um so mehr aber mufs es auffallen, dafs gerade diese Zeit so arm an Werken über algebraische Analysis ist, während sich in anderen Zweigen der Mathematik, namentlich ihren elementaren Partieen, eine fast überschwengliche Fruchtbarkeit der deutschen Gelehrten beurkundet.

Es dürfte wohl nicht überflüssig sein, hier eine Vergleichung der früheren Behandlungsweisen der Analysis mit der jetzigen, hauptsächlich durch Cauchy angeregten, vorzunehmen. Die Mathematik hat mit der Chemie das Eigenthümliche gemein, dafs man zur Erlangung eines und desselben Resultats sehr verschiedene Wege, deren Zahl öfters nicht unbedeutend ist, einschlagen kann. Unter diesen mufs es einen geben, welcher den Anforderungen der Wissenschaft am meisten genügt; zu diesen Anforderungen aber rechne ich: heuristischen Gedankengang, Strenge und architektonisches Gefüge. Betrachten wir nach diesen Gesichtspunkten die älteren Methoden, so werden wir die erste Forderung immer, die anderen aber sehr wenig befriedigt finden. Die Methode der unbestimmten Coeffizienten z. B., die beliebteste der früheren Zeit, ist durchweg heuristisch, wenn man die anfangs gemachte Hypothese zugiebt und



Digitized by Google

hat in so fern für den Praktiker einigen Werth, aber sie bleibt immer nur ein halber Beweis, so lange man nicht nachweist, dafs die zur Coeffizientenbestimmung benutzte Eigenschaft der behandelten Funktion für die letztere charakteristisch ist, und für ein System der Wissenschaft ist sie endlich völlig unbrauchbar, da sie nur isolirte Resultate liefert, ohne die Schnur, an der man die gefundenen Perlen aufreihen könnte, auch nur im Entferntesten ahnen zu lassen. Ähnliche Bemerkungen treffen alle früheren Darstellungen, bei denen man immer den Fufstapfen des Erfinders folgte, ohne zu bedenken, dafs die Methode der Erfindung nicht immer die systematisch beste ist; dem schöpferischen Genie eines Euler war es nur um Erweiterung des wissenschaftlichen Gebietes zu thun, unbekümmert darum, ob diese Eroberungen gehörig gesichert waren oder nicht.

Im Gegensatze hierzu finden wir bei Cauchy (Cours d'Analyse, Paris 1821) die gröfste Strenge bei vieler Kürze in der Entwickelung; dagegen leidet die Schönheit des architektonischen Baues durch sehr gekünstelte Anordnung und das Leben der Erfindung fehlt gänzlich. Auf jeder Seite bemerkt man, dafs die Wissenschaft auf diesem Wege nicht entstanden ist und dafs ihre Resultate hier blos bewiesen werden sollen. Diefs mag auch vielleicht bei Manchem den Glauben hervorgerufen haben, dafs Cauchy blos Seiltänzerkunststücke mache, und zeigen wolle, dafs er Fertigkeit genug besitze, um Alles auf den Kopf stellen zu können. Wer sich aber einmal durch die freilich etwas sterile Darstellung durchgefunden hat, wird dagegen in Cauchy's Werke eine wahre Fundgrube schöner analytischer Entwickelungen entdecken und gestehen müssen, dafs Cauchy hinsichtlich der Strenge seiner Beweise allen folgenden Analytikern ein ebenso hohes Vorbild ist, wie die Geometer des Alterthums ihren Nachkommen.

Zwischen diesen beiden Extremen habe ich einen Mittelweg einzuschlagen gesucht, welcher das Interesse des heuristischen Gedankenganges mit der Strenge des französischen Analytikers vereinen und dem Gange ein besseres architektonisches Gefüge verleihen soll, als man bisher an diesem Theile der Mathematik bemerkt hat. Nachdem ich nun hiermit im Allgemeinen die Tendenz des vorliegenden Werkes bezeichnet habe, erlaube ich mir noch einige mehr in's Einzelne gehende Bemerkungen über die wichtigsten Partieen desselben.

Den Anfang bilden die Lehren von den unabhängigen und den abhängigen Variabelen und den Funktionen, da diese Begriffe das Fundament

Digitized by Google

ausmachen, auf welchem die ganze Analysis sich erhebt. In so fern nämlich in jeder Gleichung wie $y = f(x)$ drei Dinge zu unterscheiden sind, das unabhängig veränderliche $x$, die Natur der Funktion $f$ und das abhängig veränderliche $y$, können auch sogleich drei Aufgaben gestellt werden, je nachdem man eines der genannten drei Stücke als unbekannt, die jedesmal übrigen als bekannt ansieht und jenes aus diesen zu bestimmen sucht. Die erste Aufgabe, aus $x$ und $f$ das zugehörige $y$ zu bestimmen, ist keine andere, als Methoden anzugeben, wonach man alle Werthe einer Funktion, z. B. die Sinus aller möglichen Bögen, berechnen könnte. Die zweite Aufgabe, aus $y$ und $f$ das entsprechende $x$ zu bestimmen, ist gerade das Umgekehrte der ersteren; die dritte endlich, aus $x$ und $y$ die Natur der Funktion $f$ zu erkennen, bildet das sogenannte Interpolationsproblem in der weitesten Bedeutung. Aufserdem aber haben die einzelnen Funktionen noch gewisse charakteristische Eigenschaften, und es entstehen daher noch die beiden Aufgaben, aus der Form einer Funktion ihre Eigenschaften abzuleiten, und umgekehrt, aus den gegebenen Eigenschaften einer ihrer Form nach unbekannten Funktion diese selbst zu bestimmen. Von diesen fünf Aufgaben, welche aus dem Begriff der Funktion entspringen, sind diejenigen zwei die schwersten, in welchen nicht Gröfsen oder Eigenschaften, sondern die Natur der Funktionen, also Rechnungsoperationen bestimmt werden sollen und ihre Lösungen sind nur in wenigen Fällen durch die Hülfsmittel der Algebra möglich. Die übrigen Aufgaben dagegen lassen sich durch die Algebra behandeln, sobald man sich auf eine gewisse, geschickt gewählte Anzahl von Funktionen beschränkt, welche überdies die wichtigsten für die Anwendungen der Mathematik sind; ihre Lösung bildet den Gegenstand der algebraischen Analysis*). Läfst man die Gröfsen $x$, $y$ und die Natur der Funktion $f$ sich ändern und nimmt nun die Änderungen von $x$, $y$, $f$ der Reihe nach als bekannt an, so erhält man die Aufgaben: 1) aus der Änderung von $x$ in einer gegebenen Funktion $f$ die Änderung von $y$ zu bestimmen, 2) umgekehrt, aus den Änderungen von $y$ die des $x$ zu finden, und 3) aus den Änderungen von $x$ und $y$ die Natur der Funktion $f$ zu erkennen. Von diesen Problemen bilden die beiden

*) Thibaut giebt die Behandlung der Form $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$ für den Zweck der niederen Analysis aus; ich mufs diefs nach der obigen Erörterung für eine sehr beschränkte Auffassung halten, da überdiefs jene Form nur eine spezielle von den Formen ist, unter welchen die Auflösungen der oben angedeuteten Aufgaben erscheinen. (M. s. die Schlufsbetrachtung.)

Digitized by Google

ersten die Differenzen- und Differenzialrechnung, die letzte die Summen- und Integralrechnung. Untersucht man noch den Einfluſs, welchen eine Änderung der Natur der Funktion $f$, welche bisher constant blieb, auf $x$ und $y$ ausübt, so kommt man auf die Variationsrechnung. Hiermit schlieſst sich der Kreis der möglichen Combinationen; und da der Begriff der Funktion schon der allgemeinste ist, welchen man einer Gröſsenwissenschaft zur Basis geben kann, so haben wir hiernach keinen Zuwachs der Mathematik zu erwarten, welcher etwas wesentlich von den angeführten Disciplinen Verschiedenes enthielte.

Die Untersuchung über die Veränderungen, welche eine successive Änderung der unabhängig Veränderlichen in den Werthen der abhängig Veränderlichen nach sich zieht, führt von selbst auf den Begriff der Gränze. Man hat sich hie und da Mühe gegeben, diesen Begriff zu vermeiden, als ob er ein der Mathematik fremder, oder zu dunkler sei, ich glaube aber dagegen, daſs diese Bestrebungen nur armselige Auskunftsmittel zur Umschleichung eines Begriffs sind, der mit Nothwendigkeit aus der Stetigkeit unserer räumlichen und zeitlichen Anschauungen entspringt und habe daher seine Entstehungsweise mit möglichster Sorgfalt erörtert (S. 23). Man würde in der That auf nicht geringe Widersprüche stoſsen, wenn man die Betrachtung der Gränzen verbannen wollte, denn was ist dann z. B. $\sqrt{2}$ oder $\sqrt{8}$? doch nicht der Dezimalbruch, welcher in keinem Falle die fragliche Wurzel genau darstellt? und wie kommt es dann, daſs $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = 4$ und zwar genau $= 4$ ist, obgleich man weder $\sqrt{2}$ noch $\sqrt{8}$ genau aufweisen kann? Dagegen geben gerade diese Fragen, namentlich wenn man die Geometrie zu Hülfe nimmt, zu ganz interessanten Betrachtungen Veranlassung. So z. B. stellt die Geometrie die $\sqrt{2}$ genau dar, während sich die Arithmetik ihr blos nähern, aber unbegränzt nähern kann. Der Grund hiervon ist, daſs die Geometrie ihre Construktion im Ganzen nach dem Gesetz der Stetigkeit macht, während die Arithmetik die $\sqrt{2}$ aus diskreten Theilen der Einheit zusammensetzt. Käme hier nicht der glückliche Umstand hinzu, daſs man diese Theilung so weit treiben kann, als man will, so würde auch die unbegränzte Annäherung an $\sqrt{2}$ unmöglich sein, und es gäbe dann in der Arithmetik keine Gränzen. Auch von einer anderen Seite her zeigt sich die Nothwendigkeit der Gränzenbetrachtungen. Es ist nämlich ein groſser Unterschied, ob man eine Veränderliche einem speziellen bestimmten Werthe gleich setzt, oder jene in diesen stetig übergehen läſst.

Digitized by Google

Dieser Unterschied tritt namentlich an unstetigen Funktionen sehr scharf hervor. Welcher ist z. B. der Werth des Ausdruckes

$$Arctan\frac{1}{a-x} - Arctan\frac{1}{x-a} = f(x)$$

für $x = a$? Hier würden, wenn man die verschiedenen Weisen, auf welche $x$ in $a$ übergehen kann, nicht berücksichtigt, drei von einander ganz verschiedene Antworten möglich sein.

1) Zuerst könnte man sagen, es ist

$$f(a) = Arctan\frac{1}{a-a} - Arctan\frac{1}{a-a}$$

$$= Arctan\,\infty - Arctan\,\infty = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0.$$

2) Da $Arctan\frac{1}{x-a} = -Arctan\frac{1}{a-x}$ ist, so folgt

$$f(x) = 2\,Arctan\frac{1}{a-x}$$

mithin für $x = a$

$$f(a) = 2\,Arctan\frac{1}{0} = \pi.$$

3) Umgekehrt ist aber in dem Ausdrucke für $f(x)$ auch $Arctan\frac{1}{a-x} = -Arctan\frac{1}{x-a}$, folglich

$$f(x) = -2\,Arctan\frac{1}{x-a}$$

und $f(a) = -2\,Arctan\frac{1}{0} = -\pi$.

Welches von diesen drei Resultaten ist denn nun das richtige? Hierauf kann man sehr leicht antworten, wenn man statt $x = a$ zu setzen, $x$ in $a$ übergehen läfst. Dieser Übergang ist auf doppelte Weise möglich, entweder durch Zunahme oder durch Abnahme des $x$; im ersten Falle würden wir den Werth $a$ als die Gränze von $a - \delta$, im zweiten als die von $a + \delta$ ansehen müssen, wobei $\delta$ jederzeit eine positive bis zur Null abnehmende Gröfse bedeutet. Nehmen wir daher zuerst $x = a - \delta$, so wird

$$f(a-\delta) = Arctan\frac{1}{\delta} - Arctan\frac{1}{-\delta} = 2\,Arctan\frac{1}{\delta}$$

folglich

Digitized by Google

$$f(a) = Lim\ 2\ Arctan \frac{1}{\delta} = \pi.$$

Nehmen wir dagegen $x = a + \delta$, so wird

$$f(a+\delta) = Arctan \frac{1}{-\delta} - Arctan \frac{1}{\delta} = -2\ Arctan \frac{1}{\delta}$$

folglich

$$f(a) = Lim\ -2\ Arctan \frac{1}{\delta} = -\pi.$$

Wenn also $x$ durch Zunahme sich der Gränze $a$ nähert, so geht $f(x)$ in $+\pi$ über; nähert sich dagegen $x$ durch Abnahme dem Werthe $a$, so geht $f(x)$ in $-\pi$ über. Diefs wird man auch leicht geometrisch verifiziren können. Wir sehen also, dafs das erste Resultat $f(a) = 0$, welches sich am natürlichsten darzubieten schien, in jedem Falle unrichtig ist, und dafs die beiden anderen nur unter ganz bestimmten Voraussetzungen gelten. Diese Entscheidung aber hätten wir ohne Hülfe der Gränzenbetrachtungen gar nicht geben können.

Ich will hier noch einen Punkt berühren, der zu mancherlei Diskussionen Veranlassung gegeben hat; es ist diefs die Behandlung des Unendlichen. In dieser hat man sich vielfach den grofsen Fehler zu Schulden kommen lassen, das Unendliche als bestimmtes Quantum aufzufassen und damit zu rechnen, als hätte man eine endliche bestimmte Gröfse vor sich. Hinter diesen Bestrebungen scheint mir, obwohl es nirgends klar ausgesprochen wird, eine halbphilosophische Forderung zu stehen. So wie man sich nämlich in der Metaphysik von der beschränkten räumlichen und zeitlichen Auffassung der Dinge zu dem Gedanken eines absoluten Seins derselben erhebt, so hat man sich auch in der Mathematik ein absolut-Unendliches verschaffen wollen, welches nicht mehr den Charakter der Unvollendbarkeit an sich trägt, wie sonst alle ins Unbegränzte wachsenden Gröfsen. Hierbei hat man aber Eines übersehen. Das metaphysisch-Absolute besteht nur in der Negation der Schranken, hat aber, wenn man sich nicht auf phantastische Träumereien einlassen will, keinen positiven wissenschaftlichen Inhalt, indem die Kategorieen keine Anwendung auf die Ideen finden; ganz ebenso würde sich die Sache auf der mathematischen Seite gestalten; jenes durch Abstraktion von der Unvollendbarkeit extensiver Gröfsen gewonnene schlechthin-Unendliche enthält gar nichts Positives mehr in sich, und Wissenschaft ist daraus defshalb unmöglich, weil alle Rechnungsoperationen, die doch nur für die Gröfsen erster Art be-

Digitized by Google

weisbar sind, gar nicht auf jenes Absolute angewendet werden können, wenn man sich nicht aufs Hypothesenschmieden legen will. In der That entstehen auch durch dergleichen Versuche die härtesten Widersprüche gegen die ersten Grundsätze der Gröfsenlehre; so verstöfst z. B. der Satz $\infty + a = \infty$ gegen den Grundsatz: jede Gröfse ist gröfser, als einer ihrer Theile. Will man den Widerspruch heben, so bleibt weiter nichts übrig*), als $\infty$ für keine Gröfse zu erklären, aber damit geräth man aus der Scylla in die Charybdis, denn nun hat man zwei ungleichartige Dinge addirt, wovon das eine in das Gebiet der Gröfsen gehört, das andere nicht.

Wieder Andere sagen, die Gleichung $\infty + a = \infty$ ist nur eine kurze Ausdrucksweise für den Satz: bei wachsenden $x$ nähern sich die Gröfsen $x + a$ und $x$ einer verhältnifsmäfsigen Gleichheit. Das ist zwar etwas besser, aber immer noch sehr ungenau gesprochen. Denn da hier von einer verhältnifsmäfsigen Gleichheit die Rede ist, so mufs man fragen, ob das in Betrachtung kommende Verhältnifs ein arithmetisches, geometrisches, harmonisches, oder was sonst für eines sei. Darauf ist die Antwort: das geometrische, so dafs also der Satz eigentlich lautet: der Quotient $\frac{x}{x+a}$ nähert sich für wachsende $x$ der Einheit. Fügt man aber diese Interpretationen zu, so fällt auch der Vortheil der Kürze, welchen jene Redeweise haben soll, gänzlich weg und man kommt von selbst auf die Betrachtung der Gränzen zurück.

Bei dieser Gelegenheit will ich noch eine Frage beantworten, die man leicht aufwerfen könnte, um manche Gränzenbetrachtungen zu verdächtigen**). Es liefse sich nämlich folgender Zweifel aufstellen; es ist immer $1 = Lim\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\left(1-\frac{3}{m}\right)\ldots\left(1-\frac{k}{m}\right)$, für wachsende $m$, sobald $k$ von $m$ unabhängig ist; aber wie steht dann die Sache, wenn $k$ von $m$ abhängt, z. B. $k = m - 1$ ist? Bevor ich diese Frage beantworte,

*) Man könnte noch ein Auskunftsmittel versuchen, indem man die gewöhnliche Definition von „Gröfse" für zu speziell erklärte und eine andere gäbe. Nun dann gebe man sie! Es hat diefs aber noch keiner der Verfechter jener Ansicht gethan und zwar aus sehr einfachen Gründen.

**) Dieser Einwurf rührt von Liouville her; m. s. Grunerts Archiv der Mathematik I. Theil 2tes Heft.

Digitized by Google

will ich erst bemerken, dafs dieselbe eigentlich einfacher so ausgesprochen werden kann: wenn in der Reihe von Gröfsen

$$\frac{1}{m}, \frac{2}{m}, \frac{3}{m}, \frac{4}{m}, \frac{5}{m}, \cdots$$

$m$ beständig wächst, nähern sich dann alle Glieder der Null, oder giebt es Ausnahmen? Würde wohl der Fall, wo einer der Zähler $= m - 1$ oder $m - 2$ etc. wäre, eine Ausnahme bilden? Hierauf läfst sich nun leicht antworten. Geben wir nämlich dem $m$ successive die Werthe 1, 2, 3, ... so erhalten wir der Reihe nach

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{4}{1}, \cdots$$

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \frac{4}{2}, \cdots$$

$$\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \frac{4}{3}, \cdots$$

$$\frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4}, \cdots$$

. . . . . .

Wollen wir nun in einem bestimmten Gliede der ursprünglichen Reihe die Gränze für wachsende $m$ finden, so brauchen wir nur in unserem Schema von dem Index des Gliedes in seiner Vertikalreihe abwärts fortzugehen und wir nähern uns mehr und mehr der fraglichen Gränze. Zugleich bemerkt man, dafs dieselbe in jedem Falle die Null sein mufs, da in $\frac{k}{m}$ der Nenner $m$ beliebig vielmal gröfser gemacht werden kann, als der constante Zähler $k$. Wollte man aber $k$ von $m$ abhängig machen, etwa für $k = m - 1$, so ergäbe sich für $m = 1, 2, 3, \ldots$ der Reihe nach $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots$ und zugleich ersieht man aus dem vorigen Schema, dafs man hier gar nicht in einem bestimmten Gliede der Reihe

$$\frac{1}{m}, \frac{2}{m}, \frac{3}{m}, \frac{4}{m}, \cdots$$

zur Gränze für wachsende $m$ übergeht, sondern immer aus der Vertikalreihe eines Gliedes in die des nächstfolgenden überspringt. In so fern man also in einem Gliede $\frac{k}{m}$ der Reihe $\frac{1}{m}, \frac{2}{m}, \ldots$ zur Gränze für wachsende $m$ übergehen will, hat es gar keinen Sinn, $k$ von $m$ abhängig zu ma-

Digitized by Google

chen, weil man dann selber nicht mehr weifs, von welchem bestimmten Gliede die Rede ist. Ebenso verhält es sich mit dem Produkte

$$\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\left(1-\frac{3}{m}\right)\ldots\left(1-\frac{k}{m}\right)$$

Will man seine Gränze für wachsende $m$ suchen, so würde es keinen Sinn haben, $k$ von $m$ abhängig zu machen, weil man dann nicht den Gränzwerth eines bestimmten Produktes finden, sondern das Produkt selbst in immer andere von gröfserer Gliederanzahl verwandeln würde.

Man sieht also, dafs jene Zweifel, welche man namentlich über die Ableitung der Exponenzialreihe aus der Binomialreihe erheben könnte, nur auf einem Mifsverständnifs beruhen.

Die Lehre von der Convergenz und Divergenz der Reihen habe ich jedem Gebrauche der Reihen selbst vorausgeschickt, weil mir die Kritik der Methode diese Anordnung auferlegte. Alle Rechnungsoperationen nämlich, welche uns die Algebra lehrt, gelten ursprünglich nur für Gröfsen, welche aus diskreten Theilen, deren Anzahl endlich ist, zusammengesetzt sind; so lernen wir z. B. $a+b+c+\ldots$ mit $\alpha+\beta+\gamma+\ldots$ multipliziren, aber immer nur unter der Voraussetzung, dafs die Anzahl der Theile in jedem Faktor eine endliche und daher jeder Faktor selbst eine endliche bestimmte Gröfse sei. Diese glücklichen Umstände finden aber bei den unendlichen Reihen gar nicht statt. Hier besteht Dasjenige, womit gerechnet werden soll, aus einer unendlichen Menge von Theilen, unter denen noch überdiefs ein gewisses Bildungsgesetz (Rekursionsskale) existirt; es versteht sich also von selbst, dafs auch Rechnungsoperationen, welche auf jeden einzelnen Theil angewendet werden sollen, gar nicht vollständig zu Stande gebracht werden können, und dafs sich auch nicht sogleich absehen lassen wird, wohin man kommen würde, wenn man die Operationen wirklich vollständig ausführen könnte. Diese Schwierigkeiten lassen sich nur dadurch besiegen, dafs man mit Hülfe der Gränzenbetrachtungen die unendlichen Reihen aus den endlichen durch successive Vermehrung der Gliederzahl entstehen läfst und zugleich die Modifikationen untersucht, welche die auf endliche Reihen angewendeten Rechnungsoperationen bei beständigem Anwachsen der Gliedermenge erleiden. Da wir nur mit endlichen bestimmten Gröfsen rechnen können, so bleibt hierbei immer die Hauptfrage: in wie fern lassen sich unendliche Reihen als endliche bestimmte Gröfsen ansehen? die sich bei der beständigen Vermehrung der Reihenglieder in die folgende verwandelt? unter welchen

Digitized by Google

Umständen haben unendliche Reihen eine bestimmte endliche Gröfse zur Gränze? Die Beantwortung dieser Frage ist aber nichts Anderes, als die Untersuchung über die Convergenz der Reihen. Wir kommen hiernach zu dem Schlusse, dafs sich nur mit convergenten Reihen sicher rechnen läfst.

Im Widerspruche zu diesem beschränkenden Resultate der Kritik hat man es bis in die neueste Zeit herein versucht, auch die divergenten Reihen in den Kreis der Analysis zu ziehen. Ich will hier kurz zeigen, dafs dieser Calcül durchweg auf einer ganz unhaltbaren Hypothese ruht. Euler, der Erfinder dieser sorglosen Weise zu rechnen, verfährt folgendermaafsen. Er zeigt zuerst, dafs für $x < 1$ folgende Gleichung gilt:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots \textit{ in inf.}$$

Da er bei der Ableitung derselben keine Rücksicht auf die in der Rechnung successiv vorkommenden Reste nimmt, so hat dieselbe einen gewissen Schein der Allgemeingültigkeit, und dieser veranlafst Euler, jene Gleichung auch für andere als ächt gebrochene $x$ zu gebrauchen. Hierbei hätte nun der Umstand, dafs die erwähnte Gleichung für $x > 1$ eine Identität zwischen der Summe von lauter positiven Gröfsen und einer negativen angiebt, eine Aufforderung sein sollen, die Grundlagen des Calcüls selbst einer genauen Kritik zu unterwerfen; statt aber auf diese Weise den Widerspruch von Grund aus zu heben, versucht Euler, denselben zu erklären und kommt nun auf den Gedanken, $\frac{1}{1-x}$ nicht mehr als Summe der fraglichen Reihe, sondern als erzeugende Funktion derselben anzusehen, so dafs jetzt die Reihe nur eine nach gewissen Gesetzen aus jener Funktion abgeleitete Form ist. Diefs haben dann Andere noch etwas bestimmter so ausgesprochen: die Gleichung

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots \textit{ in inf.}$$

bedeutet: durch eine gewisse Rechnungsoperation kann man aus der Funktion links soviel Glieder der rechts stehenden Reihe entwickeln, als man nur irgend will. — So unschuldig diefs nun auch auf den ersten Blick aussehen mag, so liegt doch darin eine der gewagtesten Hypothesen, und diese betrifft das Gleichheitszeichen. So wenig es sich Jemand einfallen lassen wird, die Quelle mit Dem, was aus ihr geflossen ist, zu identifiziren, so wenig ist man hier berechtigt, die erzeugende Funktion ihrer Entwicke-

Digitized by Google

lung gleich zu setzen. Aus diesem Fehler entsprang aber noch ein anderer ebenso grofser: man wendete nämlich alle Rechnungsoperationen auf die ganz unbestimmte Beziehung zwischen der erzeugenden Funktion und ihrer Entwickelung ebenso an, als wäre diese Beziehung eine Identität; kamen nun aufserdem noch wirkliche Gleichungen in einer Rechnung vor, so oszillirte jetzt immer die Bedeutung des Gleichheitszeichens hin und her, so dafs man am Ende selber nicht mehr wufste, was jetzt das Zeichen (=) bedeutete*). Gleichwohl kann man in gewissem Sinne auch sagen, dafs bei diesen Rechnungen niemals etwas Falsches herausgekommen sei; denn da man sich schon im Anfang erlaubt hatte, dem Gleichheitszeichen eine fremde Bedeutung unterzuschieben, so konnte man auch zuletzt, das Endresultat mochte noch so absurd aussehen, wieder eine Bedeutung unterlegen und sich jedenfalls eine plausible Interpretation des Gefundenen verschaffen.

Alle diese Fehler und das ganze unwissenschaftliche Treiben, welches aus ihnen entstanden ist, hätten sich nun leicht durch ein sehr einfaches Mittel vermeiden lassen, man brauchte nur ein neues Zeichen einzuführen, welches den Zusammenhang zwischen der erzeugenden Funktion und ihrer Entwickelung andeutete. Benutzen wir das Ähnlichkeitszeichen zu diesem Zwecke, so ist jetzt der Sinn der Formel $F \sim R$: aus der Funktion $F$ lassen sich durch eine gewisse Rechnungsoperation soviel Glieder der Reihe $R$ entwickeln, als man will. Vor allen Dingen wären nun folgende Fragen zu beantworten: 1) wenn man durch verschiedene Rechnungsoperationen aus einer und derselben Funktion $F$ zwei verschiedene Reihen entwickelt hat, wenn also $F \sim R$ und zugleich $F \sim R'$ ist, in welchem Verhältnisse stehen dann $R$ und $R'$ zu einander? 2) wenn $R$ die Entwickelung von $F$, und $F$ die Summe der Reihe $R'$, also $F \sim R$ und $F = R'$ ist, welche Relation findet dann zwischen $R$ und $R'$ statt? Man wird aber gleich bemerken, dafs diese Fragen sich schlechthin gar nicht beantworten lassen. Denn die Definition der Formel $F \sim R$ ist so unbestimmt allgemein und es ist so gar nichts über die Natur der Rechnungsoperationen gesagt, welche man zur Entwickelung von $R$ aus $F$ benutzen mufs, dafs man nicht den geringsten Anhaltepunkt zur Beantwortung der aufgestellten Fragen findet. Man sieht also auch von dieser Seite her, dafs mit den divergenten Reihen nichts anzufangen ist.

*) Ich habe diefs im 4ten Hefte des Vten Theiles des Grunert'schen Archivs an einzelnen Beispielen näher gezeigt.

Digitized by Google

Für die vier ersten Capitel, welche die Einleitung zu allen folgenden Untersuchungen bilden, habe ich noch im Ganzen zu bemerken, dafs in ihnen immer die geometrische Betrachtung angedeutet ist, welche man der analytischen parallel fortführen kann. Ich bin durchaus nicht für die, namentlich auch von Thibaut verfochtene Meinung, dafs man Geometrie und Analysis scharf von einander trennen solle, da mich im Gegentheile schon eine kurze Erfahrung belehrt hat, dafs nichts dem Calcül mehr Klarheit und Anschaulichkeit verleiht, als wenn man die geometrischen Transformationen nachweist, welche den analytischen entsprechen.

Die Darstellung des Binomialtheoremes habe ich in einer Weise gegeben, welche nicht nur heuristisch, sondern sogar der historischen Entstehung jenes Satzes nachgebildet ist. Die successive Multiplikation von $1 + x$ mit sich selbst bildet den Anfang, welcher in der That der historische war, und führt zunächst auf die rekursive Bestimmung der Binomialcoeffizienten, welche schon Michael Stifel kannte. Darauf folgt der Versuch einer independenten Angabe der genannten Coeffizienten, welche von Mehreren, u. A. Pascal, gleichzeitig gefunden wurde. Newton endlich entdeckte die Allgemeingültigkeit des Binomialtheoremes durch Induktion, d. h. dadurch, dafs er für spezielle Werthe der Veränderlichen und des Exponenten die Reihe summirte und die gefundene Zahl mit den Zahlen der Quadrat- und Kubikwurzeltabellen verglich. Der nämliche Gedanke der Summirung der Reihe wird auch hier ausgeführt und zwar allgemein in der von Cauchy zuerst entwickelten Weise. Dieselbe hat einen doppelten Nutzen; sie beweist die Richtigkeit des hypothetisch angenommenen Bildungsgesetzes der Coeffizienten und zeigt zugleich die Allgemeingültigkeit des binomischen Satzes. Die Exponenzial- und logarithmischen Reihen schliefsen sich unmittelbar an das Binomialtheorem an, indem beide gewisse Gränzfälle jenes Satzes darstellen.

Für die Cosinus- und Sinusreihe habe ich eine Entwickelung gegeben, welche ebensowohl vom Gebrauche der Methode unbestimmter Coeffizienten, als von der Einführung imaginärer Gröfsen frei ist; zur Vermeidung jener Methode veranlafste mich der Umstand, dafs die Hypothese, welche den Anfang der ganzen Rechnung ausmacht, sich gerade hier am allerwenigsten motiviren läfst, die imaginären Gröfsen aber mufste ich ausschliefsen, wenn ich einen natürlichen Übergang in das Gebiet dieser Gröfsen selbst gewinnen wollte. Hat man diese Rücksicht nicht zu nehmen, so kann man auch die Ableitung jener Reihen mit Hülfe der imaginären Gröfsen noch viel

Digitized by Google

kürzer fassen, als bisher geschehen ist, indem man nämlich unmittelbar aus dem Moivre'schen Satze die Gleichung

$$e^{x\sqrt{-1}} = \cos x + \sqrt{-1}\,\sin x$$

entwickelt, wie diefs in §. 44 gezeigt worden ist.

Auf die Cosinus- und Sinusreihe folgt nun die Lehre von den imaginären Gröfsen, welche bei dieser Anordnung ein in sich abgeschlossenes, von keiner fremden Untersuchung durchbrochenes Ganzes bildet. Ich habe mich auch hier von ähnlichen kritischen Grundsätzen leiten lassen, wie bei der Reihenlehre, und diese waren um so nöthiger, da man gerade da mit grofser Willkührlichkeit zu Werke gegangen ist. So hat man sich z. B. nicht gescheut, Relationen wie $a^x . a^y = a^{x+y}$ unmittelbar für imaginäre $x$ und $y$ zu brauchen, obgleich jene Eigenschaft der Exponenzialgröfse in der Algebra und auch sonst immer nur für reelle $x$ und $y$ bewiesen wird.

Nach vollständiger Untersuchung über die Funktionen mit imaginären Veränderlichen bietet sich nun ganz von selbst der Gedanke dar, Reihen, welche nach den successiven Potenzen einer Veränderlichen fortgehen, mit Hülfe des Moivre'schen Theoremes in andere zu verwandeln, welche nach den Cosinus oder Sinus der Vielfachen eines Bogens fortschreiten (Cap. XII) und ebenso nahe liegt es, auf das Moivre'sche Theorem unmittelbar das Binomialtheorem anzuwenden. Die weitere Entwickelung dieser Idee (Cap. XIII) führt zu den verschiedenen Reihen für den Sinus oder Cosinus eines vielfachen Bogens, welche sich auf mannigfache Weise spezialisiren lassen. Als Gränzfälle ergeben sich hieraus noch die merkwürdigen Reihen für $Arc^2\,sin\,x$, $Arctan\,x$ und $Arcsin\,x$ mit einer Leichtigkeit, welche wohl bei keiner anderen Entwickelung derselben anzutreffen sein dürfte. Endlich liefert die Anwendung der Lehren des Cap. III auf die Reihen für $sin\,m\,x$ und $cos\,m\,x$ die Produkte für diese Funktionen, aus denen sich die unendlichen Produkte für $sin\,x$ und $cos\,x$ sehr ungezwungen und mit der nöthigen Strenge ergeben. An diese reihen sich einige anderweite Entwickelungen, welche die Reihen für die Tangente, Cotangente, Sekante und Cosekante betreffen.

Hiermit schliefst sich der Umfang, welchen man gewöhnlich der algebraischen Analysis zu geben pflegt. Ich habe es aber für zweckmäfsig gehalten, auch die Lehre von den Kettenbrüchen in den Kreis derselben zu ziehen, da die Kettenbrüche eines von den Mitteln sind, durch welche man die numerischen Werthe der Funktionen berechnen kann und in so fern



Digitized by Google

die erste Aufgabe der algebraischen Analysis lösen helfen. Auch in dieser Disziplin begegnet man einer gewissen Sorglosigkeit des Calcüls, welche hauptsächlich darin besteht, dafs man die Kettenbrüche ohne Weiteres ins Unendliche fortsetzt, ohne den Einflufs zu beurtheilen, welchen die successiv weggelassenen Reste ausüben. Man hat sich auch hier, ähnlich wie bei den divergenten Reihen, durch die Hypothese der erzeugenden Funktion des Kettenbruches helfen wollen, hat aber dabei den alten Fehler begangen, die Quelle mit Dem, was aus ihr entspringt, ohne Weiteres zu identifiziren. Ich sah mich daher wieder genöthigt, die Grundsätze der Kritik zu handhaben und mufste defshalb einige neue Untersuchungen anstellen.

Diefs waren die Bemerkungen, welche ich dem Buche selbst vorauszuschicken für nöthig hielt; ich füge ihnen noch den Wunsch bei, dafs mein Werk freundliche Aufnahme finden und das Seinige zur Belebung gründlicher mathematischer Studien beitragen möge.

Endlich habe ich noch dem Herrn Verleger für seine geschmackvolle typographische Ausstattung und dem Kupferstecher Herrn Mädel II. in Weimar für die sorgfältige Ausführung der Figuren meinen Dank auszusprechen.

Jena, Ostern 1845.

**O. Schlömilch.**

Digitized by Google

# Inhalt.


Seite

Einleitung . . . . . 1

Cap. I. Von den veränderlichen Gröfsen und den Funktionen im Allgemeinen.

§. 1. Begriffe von veränderlichen Gröfsen und Funktionen . . . . . 2
§. 2. Nähere Bestimmung der Aufgaben der Analysis . . . . . 4
Über die Funktionen *Arcsin*, *Arctan etc.* . . . . . 7
§. 3. Die verschiedenen Arten von Funktionen . . . . . 12
§. 4. Die geometrische Darstellung der Funktionen . . . . . 15
§. 5. Von den Gränzwerthen der Funktionen bei beständiger Zunahme oder Abnahme der Veränderlichen . . . . . 21
§. 6. Bestimmung einiger Gränzwerthe . . . . . 27
Allgemeine Theoreme über die Gränzen der Summen, Produkte etc. . 37
§. 7. Stetigkeit und Unstetigkeit der Funktionen . . . . . 39
§. 8. Reduktion einiger Gränzbestimmungen auf andere, Theoreme von Cauchy 47
§. 9. Anwendungen der beiden Theoreme des vorigen Paragraphen . . . . 57
Vieldeutigkeit der Ausdrücke, $0^0$, $\infty^0$ . . . . . 59

Cap. II. Bestimmung der Natur verschiedener Funktionen aus gegebenen Eigenschaften derselben.

§. 10. Form der hieher gehörenden Aufgaben überhaupt . . . . . 61
§. 11. Auflösung der Gleichung $f(x) + f(y) = f(x + y)$ . . . . . 64
§. 12. - - - - - $f(x) \cdot f(y) = f(x + y)$ . . . . . 68
§. 13. - - - - - $f(x) + f(y) = f(xy)$ . . . . . 71
§. 14. - - - - - $f(x) \cdot f(y) = f(xy)$ . . . . . 73

Cap. III. Bestimmung der Natur der Funktionen aus gegebenen speziellen Werthen derselben.

§. 15. Hierher gehörende Aufgaben überhaupt . . . . . 76




Digitized by Google

Seite

§. 16. Wichtigste Eigenschaften der algebraischen, ganzen und rationalen Funktionen . . . . . 77
§. 17. Das Interpolationsproblem . . . . . 80

## Cap. IV. Von den endlichen und unendlichen Reihen.

§. 18. Entstehung der Reihen überhaupt . . . . . 84
§. 19. Summirung einiger endlichen und unendlichen Reihen . . . . . 88
§. 20. Convergenz und Divergenz der Reihen . . . . . 95
§. 21. Beurtheilung der Convergenz mittelst der Restbetrachtung . . . . . 99
§. 22. Vergleichung verschiedener Reihen mit der geometrischen Progression . . 103
§. 23. Weitere Betrachtungen über die Convergenz und Divergenz der Reihen . 107
§. 24. Anderweite Reihenvergleichungen . . . . . 110
§. 25. Reihen mit wechselnden Gliedern . . . . . 116
Convergenz der Reihe $1 + \frac{\mu}{1} x + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2} x^2 +$ etc. . . . . 118
§. 26. Die Rechnungen mit den unendlichen Reihen . . . . . 121

## Cap. V. Das Binomialtheorem.

§. 27. Bestimmung der hierher gehörenden Aufgabe und erste Schritte zur Lösung derselben. . . . . 130
§. 28. Weitere Betrachtung der Binomialreihe . . . . . 135
§. 29. Summirung der Binomialreihe . . . . . 138
§. 30. Folgerungen aus dem Bisherigen . . . . . 143
§. 31. Die wichtigsten Eigenschaften der Binomialcoeffizienten . . . . . 145

## Cap. VI. Die Exponenzialreihe.

§. 32. Ableitung derselben aus der Binomialreihe . . . . . 152
§. 33. Andere Ableitungen der Exponenzialreihe . . . . . 157

## Cap. VII. Die logarithmischen Reihen.

§. 34. Ableitung einer logarithmischen Reihe aus dem Binomialtheorem . . . 160
§. 35. Anderweite Reihen zur Berechnung der Logarithmen . . . . . 163

## Cap. VIII. Die Reihen für den Sinus und Cosinus.

§. 36. Vorbereitende Sätze . . . . . 166
§. 37. Die Cosinus- und Sinusreihe . . . . . 170
§. 38. Zusammenhang zwischen den Exponenzialgrößen, den Sinus und Cosinus mittelst des Imaginären. . . . . 174

## Cap. IX. Potenzen mit unmöglichen Grundzahlen.

§. 39. Allgemeine Form unmöglicher Binome . . . . . 178

Digitized by Google

Seite

Produkte reduzirter Ausdrücke . . . . . 180
Quotienten derselben . . . . . 181
§. 40. Das Moivre'sche Theorem. . . . . 182

§. 41. Auflösung der Gleichungen $x^n = 1$ und $x^{\frac{n}{m}} = 1$ . . . . . 184

§. 42. Auflösung der Gleichungen $x^n = -1$ und $x^{\frac{n}{m}} = -1$ . . . . . 189
§. 43. Das Theorem von Cotes . . . . . 193

Cap. X. Die Exponenzialgröfsen und Logarithmen mit imaginären Exponenten.

§. 44. Übergang von den Potenzen zu den Exponenzialgröfsen . . . . . 199
§. 45. Die imaginären Logarithmen. . . . . 202

Cap. XI. Die goniometrischen und cyklometrischen Funktionen mit imaginären Variabelen.

§. 46. Die goniometrischen Funktionen . . . . . 205
§. 47. Die cyklometrischen Funktionen . . . . . 207

Cap. XII. Reihen, welche nach den Cosinus oder Sinus der Vielfachen eines Bogens fortschreiten.

§. 48. Einfachste Reihen dieser Art . . . . . 213
§. 49. Die Binomialreihe mit imaginären Veränderlichen. . . . . 218
§. 50. Die Exponenzialreihe mit imaginären Veränderlichen . . . . . 221
§. 51. Die Logarithmenreihe mit imaginären Veränderlichen . . . . . 223

Cap. XIII. Reihen für den Sinus oder Cosinus eines vielfachen Bogens.

§. 52. Transformation des Moivre'schen Satzes mit Hülfe des Binomialtheoremes 229
§. 53. Spezialisirung der gefundenen vier Hauptformeln . . . . . 235

Cap. XIV. Reihen für die cyklometrischen Funktionen.

§. 54. Rückblick auf die Formeln des vorletzten Paragraphen . . . . . 243
§. 55. Die cyklometrischen Reihen . . . . . 246

Cap. XV. Die goniometrischen Funktionen unter der Form von Produkten.

§. 56. Produkte für den Sinus und Cosinus eines vielfachen Bogens. . . . . 252
§. 57. Unendliche Produkte für den Sinus und Cosinus eines beliebigen Bogens . 257

***

Digitized by Google

Seite

**Cap. XVI. Verschiedene Relationen für goniometrische Funktionen.**

§. 58. Die Bernoulli'schen Zahlen . . . . . 262
§. 59. Einführung imaginärer Binome in die unendlichen Produkte für den Sinus und Cosinus . . . . . 265
§. 60. Die Reihen für die Tangente, Cotangente und Cosekante . . . . . 270
§. 61. Die Sekantencoeffizienten und die Sekantenreihe . . . . . 277
§. 62. Rekursionsskale für die Bernoulli'schen Zahlen und Sekantencoeffizienten . 281

**Cap. XVII. Die wichtigsten Eigenschaften der Kettenbrüche.**

§. 63. Eigenschaften der Näherungsbrüche . . . . . 285
§. 64. Die unendlichen Kettenbrüche, ihre Convergenz und Divergenz . . . . 293
§. 65. Die Irrationalität gewisser Kettenbrüche . . . . . 304
§. 66. Verwandlung von Quadratwurzeln in Kettenbrüche . . . . . 312
Untersuchung über die Reste der Kettenbrüche . . . . . 314

**Cap. XVIII. Verwandlung von Reihen in Kettenbrüche.**

§. 67. Verwandlung einer Reihe von sehr allgemeiner Form . . . . . 323
§. 68. Verwandlung einer anderen Reihe von allgemeiner Form . . . . . 329
§. 69. Die Gaufsesche Reihe . . . . . 332
§. 70. Kettenbrüche für einige der wichtigsten Funktionen . . . . . 338
§. 71. Die Irrationalität der natürlichen Logarithmen und der Ludolph'schen Zahl 343

**Schlufsbetrachtung** . . . . . 347

---

## Berichtigungen.

S. 30. Z. 3. v. u. statt: und $>1$ lies und $<1$.
- 62. - 7. - - ist das Zeichen „ zu streichen.
- 106. - 4. - - ist durchweg $a$ für $\alpha$ zu setzen.
- 158. - 3. - - statt die lies der.
- 303. im zweiten Kettenbruche statt $\frac{5}{7}$ lies $\frac{5}{6}$.

Digitized by Google

# Algebraische Analysis.

Digitized by Google

# Einleitung.

Die mannigfachen Beziehungen der Zahlengröfsen unter einander, welche aus den verschiedenen möglichen Verbindungen derselben hervorgehen, bilden im Allgemeinen den Gegenstand aller Rechnung. So lehrt uns die Arithmetik mehrere gegebene Zahlen zu einer Summe oder einem Produkt vereinigen, die Differenz oder den Quotienten zweier Zahlen aufsuchen, eine gegebene Zahl auf diese oder jene Potenz erheben oder die Wurzel irgend eines Grades aus derselben ziehen u. s. w., sie zeigt uns überhaupt, wie man auf fest bestimmte, vorliegende Gröfsen, sie mögen nun durch Zahlen oder Buchstaben bezeichnet sein, die eine oder andere Operation anwenden könne. Eine solche Behandlungsweise für die Zahlenverknüpfungen ist aber nur eine beschränkte und leidet hauptsächlich an folgenden zwei Mängeln. Erstlich kennt die Arithmetik den Begriff successiver Veränderung nicht, weil sie es nur mit bestimmt angegebenen Gröfsen zu thun hat, die aus einer gewissen Menge von Einheiten als diskreten Theilen zusammengesetzt sind, zweitens fehlt es ihr an der Einsicht in den allgemeinen Zusammenhang der verschiedenen Operationen; sie lehrt uns wohl durch irgend ein Verfahren aus einer gegebenen Zahl eine andere bilden, und macht uns in dieser Absicht mit den verschiedenartigsten Methoden bekannt, aber sie deckt den inneren Zusammenhang dieser Rechnungsoperationen nicht auf und weist die gemeinschaftliche Quelle derselben nicht nach.

Diese Mängel zu beseitigen und die verschiedenen Gröfsenverknüpfungen aus einem möglichst allgemeinen Gesichtspunkte zu betrachten, ist das Geschäft der Analysis, welche daher einerseits wissenschaftlich über der Arithmetik oder Synthesis, wie man sie nennen könnte, steht, andererseits aber die Hülfe derselben nicht entbehren kann. Man theilt sie gewöhnlich in zwei Theile, niedere oder algebraische Analysis, von Manchen



Digitized by Google

auch allgemeine Arithmetik genannt, und höhere Analysis, welche sich hauptsächlich dadurch unterscheiden, dafs der erstere blos die aus der Arithmetik bekannten Rechnungsoperationen anwendet, während der letztere neue Rechnungsweisen kennen lehrt.

---

# Capitel I.

## Von den veränderlichen Gröfsen und den Funktionen im Allgemeinen.

### §. 1.

#### Begriffe von veränderlichen Gröfsen und Funktionen.

Will nun die Analysis ihrer Aufgabe, die Veränderlichkeit der Gröfsen und den allgemeinen verschiedenartigen Zusammenhang beliebiger Gröfsen in Betrachtung zu ziehen, näher treten, so mufs sie sich zuvörderst nach Symbolen umsehen, unter welchen sie derartige Dinge in Rechnung zu bringen hätte. So wird es nöthig, veränderliche Gröfsen, d. h. solche, die alle möglichen Werthe annehmen können, von den unveränderlichen, d. h. denen, welche immer den nämlichen Werth behalten, zu unterscheiden und diese Unterscheidung durch irgend eine Bezeichnungsweise auszudrücken. Für diesen Zweck ist man darin übereingekommen, die unveränderlichen, oder wie man auch sagt, constanten Gröfsen mit den ersten Buchstaben des Alphabets $a$, $b$, $c$.. zu bezeichnen, für die veränderlichen oder variablen Gröfsen dagegen die letzten Buchstaben $t$, $x$, $y$, $z$ zu brauchen. In einem Ausdrucke, wie $ax + b$, bezeichnet daher für unseren Zweck $x$ nicht etwa eine unbekannte Gröfse, wie in der Algebra, sondern eine unbestimmte, welche alle möglichen Zahlenwerthe durchlaufen kann, wogegen $a$ und $b$ festbestimmte Gröfsen bedeuten, welche immer die nämlichen Werthe behalten, wie sich auch das $x$ verändern möge.

Diese Unterscheidung führt uns von selbst auf die zweite Aufgabe, nämlich den Zusammenhang zwischen zwei Gröfsen ganz im Allgemeinen auszudrücken. Setzen wir nämlich einen beliebigen Ausdruck, in welchem constante Gröfsen und eine Veränderliche vorkommen, einer neuen Gröfse gleich, also etwa unser obiges

Digitized by Google

$$ax + b = y$$

so ist die neue Gröfse $y$ offenbar wieder eine veränderliche; denn wenn $x$ andere und andere Werthe annimmt, so ändern sich auch die Werthe von $y$. Aber diese Veränderungen sind nicht willkührlich; eine Änderung des $x$ zieht eine ganz bestimmte Änderung des $y$ nach sich; z. B. für zwei bestimmte Zahlenwerthe von $x$, die wir mit $x_1$ und $x_2$ bezeichnen wollen, kommen auch ein paar bestimmte entsprechende Werthe von $y$, etwa $y_1$ und $y_2$ genannt, heraus, so dafs ist

$$ax_1 + b = y_1 \text{ und } ax_2 + b = y_2$$

Nehmen wir nun an, dafs $x_2$ um eine bestimmte Gröfse $\delta$ gröfser sei als $x_1$, also $x_2 = x_1 + \delta$, so haben wir

$$y_2 = a(x_1 + \delta) + b = ax_1 + b + a\delta$$

$$\text{d. h. } y_2 = y_1 + a\delta$$

wenn also $x$ sich um $\delta$ ändert, so ändert sich $y$ um $a\delta$, mithin hängt die Veränderung des $y$ von der des $x$ ab und zwar auf fest bestimmte Weise. — Noch auffallender tritt dieſs an dem folgenden Beispiele hervor. Es sei $u$ eine ganz beliebig veränderliche Gröfse und

$$u^2 + c = v$$

so ist offenbar auch $v$ eine Variable, aber nicht so willkührlich als $u$. Denn wenn $c$ eine positive Zahl bedeutet, so ist für alle möglichen positiven oder negativen $u$ das Quadrat $u^2$, folglich auch $u^2 + c$, mithin jenes $v$ positiv und es existirt kein Werth von $u$, für welchen $u^2 + c$ oder $v$ negativ werden könnte. Trotz der gänzlichen Unbestimmtheit des $u$ ist also doch durch die Natur der Gleichung die Veränderlichkeit von $v$ eingeschränkt und ihr als Spielraum blos das Gebiet der positiven Zahlen angewiesen. Man mufs daher unabhängige und abhängige veränderliche Gröfsen unterscheiden; die ersteren sind solche, denen man willkührlich jeden beliebigen Werth beilegen darf, die letzteren diejenigen, deren Veränderungen durch die Veränderungen einer anderen unabhängig veränderlichen Gröfse nach irgend einem Gesetze bedingt sind. Dieses Gesetz selbst spricht sich in irgend einer analytischen Formel aus, welche die unabhängig veränderliche Gröfse enthält (wie oben das $ax + b$). Jeden solchen Ausdruck, in welchem eine unabhängig veränderliche Gröfse auftritt, nennt man eine Funktion dieser Veränderlichen. Demnach sind alle beliebigen Ausdrücke wie

$$ax,\ x^a,\ a^x,\ \sqrt{b^2 - x^2},\ \log x,\ \sin x \text{ etc.}$$

sämmtlich Funktionen von $x$, die sich nur dadurch unterscheiden, dafs in



Digitized by Google

jeder die Art des Vorkommens der Hauptgröfse eine andere, oder wie man auch sagt, dafs jede anderer Natur ist. Zur Bezeichnung der Funktionen im Allgemeinen bedient man sich der Buchstaben $F$, $f$, $\varphi$, $\psi$ oder ähnlicher, welchen man denjenigen Buchstaben, der die in der Funktion vorkommende Veränderliche bezeichnet, in Parenthesen eingeschlossen auf der rechten Seite beisetzt*). Symbole wie $F(x)$, $f(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ bedeuten also nichts Anderes, als gewisse, nicht näher bestimmte Rechnungsausdrücke, in welchen eine unabhängig veränderliche Gröfse vorkommt, wobei durch die verschiedenen Buchstaben $F$, $f$, $\varphi$, $\psi$ zugleich angezeigt wird, dafs in jeder der genannten vier Funktionen $x$ auf verschiedene Weise vorkommt, oder dafs jede anderer Natur ist. Hiernach ist nun der Sinn einer Gleichung wie

$$y = f(x)$$

ganz einfach folgender: die Gröfse $y$ läfst sich dadurch aus $x$ ableiten, dafs man mit diesem irgend welche noch nicht näher bestimmte analytische Operationen vornimmt und hierdurch ist $y$ an $x$ so gebunden, dafs es sich ändert, wenn $x$ eine Änderung erleidet.

Es kann eine Funktion auch zwei oder mehrere unabhängig veränderliche Gröfsen zugleich enthalten. So ist z. B. der Ausdruck $ax + cz$, in welchem $x$ und $z$ zwei von einander unabhängige beliebige Gröfsen bezeichnen, eine Funktion von $x$ und $z$ zugleich, weil er sich ändert, wenn $x$ oder $z$ allein eine Änderung erleidet. Setzt man $ax + cz = y$, so bezeichnet man die Abhängigkeit des $y$ von $x$ und $z$ zugleich durch die Gleichung

$$y = f(x, z) \text{ oder } y = \varphi(x, z) \text{ etc.}$$

Ebenso würden nun entsprechend $f(x, z, t)$, $\varphi(x, z, u, v)$ etc. Funktionen von drei und mehr Veränderlichen andeuten.

## §. 2.

### Nähere Bestimmung der Aufgaben der Analysis.

Nachdem wir uns in dem Vorigen über die Weise verständigt haben, in welcher veränderliche Gröfsen und der unbestimmt allgemeine Zusammenhang zweier oder mehrer Gröfsen in Rechnung zu bringen sind, kön-

*) Bisweilen läfst man wohl der Kürze wegen die Parenthesen weg und setzt z. B. schlechthin $fx$ statt $f(x)$. Eine solche Schreibweise ist aber deswegen nicht sehr zu empfehlen, weil man bei ihr das Operationszeichen $f$ leicht mit einem Coeffizienten verwechselt.

Digitized by Google

nen wir nun den Zweck der algebraischen Analysis deutlicher entwickeln, als diefs in der Einleitung möglich war. In jeder Gleichung zwischen zwei Veränderlichen, etwa wie

$$ax + b = y$$

sind nämlich hauptsächlich zwei Operationen denkbar, die eine, durch welche für gegebene $x$ das zugehörige $y$ gesucht wird, und die entgegengesetzte, nach welcher $x$ so bestimmt werden soll, dafs ein gewisses angegebenes $y$ herauskommen mufs. In unserem Beispiele wäre die erste Aufgabe sehr leicht zu lösen, weil dazu nur eine Multiplikation und Addition nöthig ist; um auch die umgekehrte Aufgabe zu vollenden, braucht man blos nach den Regeln der Algebra $x$ aus $y$ zu suchen, wodurch man findet

$$x = \frac{y - b}{a}$$

Hier haben $x$ und $y$ ihre Rollen gewissermafsen vertauscht, indem jetzt $y$ die unabhängige, $x$ die abhängige Variable ist. Man bemerkt leicht, dafs die Auflösung algebraischer Gleichungen überhaupt nichts Anderes ist, als die Auflösung des umgekehrten Problems. Denn wenn z. B.

$$x^2 - 12x + 45 = y$$

gesetzt wird, so erhält man nach den gewöhnlichen Regeln der Arithmetik leicht $y$, wenn $x$ gegeben ist; verlangt man dagegen dasjenige $x$ zu finden, welches einen gewissen Werth von $y$, etwa $y = 10$, hervorbringt, so verwandelt sich die bisher unbestimmte Gröfse $x$ in eine unbekannte und man hat die quadratische Gleichung

$$x^2 - 12x + 45 = 10 \text{ oder } x^2 - 12x = -35$$

aufzulösen, aus welcher man für $x$ zwei Werthe, $x = 5$ und $x = 7$, erhält, so dafs also der Werth $y = 10$ auf zwei verschiedene Weisen erzeugt werden kann. Etwas Ähnliches läfst sich für Funktionen mehrer Veränderlichen leisten; in der Gleichung

$$ax^3 + by^2 + cz = u$$

kommen z. B. vier Veränderliche vor, von denen $x$, $y$, $z$ unabhängig sind und nur $u$ abhängig ist. Der Werth des letzteren läfst sich finden, wenn die Werthe der $x$, $y$, $z$ gegeben sind; wollte man dagegen $u$ unabhängig, $z$ aber abhängig machen, so gäbe die Transposition

$$\frac{u - ax^3 - by^2}{c} = z$$

Digitized by Google

wobei jetzt $z$ als Funktion von $u, x, y$ erscheint. Ebenso erhielte man auch

$$y = \sqrt{\frac{u - ax^3 - cz}{b}}$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{u - by^2 - cz}{a}}$$

wenn man $y$ oder $x$ aus den jedesmaligen drei übrigen Veränderlichen bestimmen wollte.

So leicht aber, wie in den angeführten Beispielen, kommt man nicht immer zu den Relationen, welche aus einer Funktionsform abgeleitet werden können; im Gegentheile erfordern dieselben oft Betrachtungen ganz besonderer Art. Diese soweit durchzuführen, dafs man die angedeuteten Aufgaben ohne Hülfe neuer Rechnungsweisen lösen könne, ist das Geschäft der niederen Analysis. Da aber der Funktionen unendlich viele sind, und jede ihrer Natur nach von einer anderen verschiedene Funktion auch eine andere Behandlungsweise erfordert, so würde die Analysis ein unvollendbares Werk werden, wenn man sich nicht auf die Betrachtung einer nicht zu grofsen und geschickt gewählten Anzahl von Funktionen beschränken wollte. Auch pflegt man die Lehre von der Auflösung der algebraischen Gleichungen aller Grade, welche einen Theil der Analysis ausmachen sollte, aus derselben auszuscheiden und als besondere Disziplin anzusehen. Die Funktionen nun, welche die niedere Analysis betrachtet, enthalten nur eine Veränderliche und sind theils dem Gebiete der Arithmetik, theils dem der Goniometrie und Cyklometrie entnommen. Die vier einfachsten, aus den vier Spezies abstammenden Funktionen sind

$$a + x,\ a - x,\ ax,\ \frac{a}{x}$$

indem man die Veränderliche die vier Operationen jener Rechnungen durchlaufen läfst. Diesen zunächst steht die Potenz, welche zu zwei verschiedenen Funktionsformen Veranlassung giebt, je nachdem man nämlich entweder die Basis oder den Exponenten als unabhängige Variable ansieht. So erhalten wir noch die Funktionen

$$x^a \text{ und } a^x$$

von denen die erstere den Namen Potenz ausschliefslich führt, während man der anderen den Namen Exponenzialgröfse gegeben hat. Da die Constante $a$ auch negativ oder gebrochen sein kann, so begreift die Potenz auch die Funktionen

Digitized by Google

$$\frac{1}{x^a} \text{ und } \sqrt[m]{x^n}$$

in sich. Aus der Exponenzialgröfse entspringt zunächst der Logarithmus in dem Systeme, worin $a$ die Basis ist. Es soll diefs mit

$$log\, x, \quad (bas.\ a)$$

bezeichnet werden; steht der Zusatz *bas. a* nicht dabei, so ist es gleichgültig, in welchem Systeme der Logarithmus genommen wird.

Die goniometrischen Funktionen, deren wichtigsten

$$sin\, x, \quad cos\, x, \quad tan\, x, \quad cot\, x, \quad sec\, x, \quad cosec\, x$$

sind, reduziren sich zwar an und für sich auf die erste, aus der man sie zusammensetzen kann; ihre Eigenschaften dagegen sind so verschiedener Art, dafs die Einzelnbetrachtung derselben höchst wichtig ist. Es mag dabei noch bemerkt werden, dafs hier $x$ niemals in Graden, sondern immer in Theilen des Halbmessers $= 1$ ausgedrückt wird, so dafs es also zu jeder beliebigen unbenannten Zahl einen Sinus, Cosinus u. s. w. giebt. Die Reduktion der in Graden gegebenen Bögen auf Theile des Halbmessers geschieht leicht mittelst der Ludolphischen Zahl $\pi$, welche der Bogenlänge von $180^0$ entspricht. Sind also $g^0$ gegeben, so hat man:

$$180^0 : \pi = g^0 : x, \text{ also } x = \frac{g}{180}\,\pi$$

wodurch jenes $x$, welches in *sin x*, *cos x* etc. gemeint ist, bestimmt wird. Ebenso leicht würde es sein, umgekehrt die Anzahl von Graden zu bestimmen, welche ein Bogen von der Länge $x$ in sich fafst.

An die goniometrischen Funktionen reihen sich noch die cyklometrischen, welche die Umkehrungen von jenen sind. Hat nämlich ein Sinus die Länge $x$, so wird der Bogen, welcher zu diesem Sinus gehört, mit

$$Arcsin\, x \text{ oder } Arc\, (sin = x)$$

bezeichnet. Da aber zu ein und dem nämlichen Sinus unzählig viele Bögen gehören, z. B. zum Sinus $+1$ die Bögen $\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{9\pi}{2} \ldots$, so bedeutet in der Regel, wenn es vorher nicht anders bestimmt wird, *Arcsin x* den kleinsten aller zugehörigen Bögen, positiv genommen. Demnach ist z. B. $Arcsin \frac{1}{\sqrt{2}}$ einzig und allein $= \frac{\pi}{4}$. Ganz ähnlich ist die Bedeutung der Zeichen

$$Arccos\, x, \quad Arctan\, x, \quad Arccot\, x, \quad Arcsec\, x, \quad Arccosec\, x.$$

Die Betrachtung der bisher genannten Funktionen bilden nun den Ge-

Digitized by Google

genstand der algebraischen Analysis. Von den vielen schönen Früchten welche eine solche mit Umsicht angestellte Untersuchung tragen mufs wollen wir nur eine im Hintergrunde zeigen. Gelingt es nämlich, allgemeine Regeln zu entdecken, nach denen man z. B. für jede Zahl den Logarithmus, für jeden Bogen den Sinus, die Tangente u. s. w. finden kann, so wird es auch möglich sein, für diese Funktionen Tafeln zu entwerfen, denen man gleich den nöthigen Logarithmus, Sinus etc. entnehmen kann. Dafs diese Ausbeute keine geringe sein werde, zeigt schon die gewöhnliche Tafel der Logarithmen, ohne welche manche Rechnungen geradezu unausführbar sein würden.

Da man in den Handbüchern der Trigonometrie die Lehre von den cyklometrischen Funktionen gewöhnlich nicht mit abgehandelt findet, so möge hier eine Entwickelung ihrer Grundzüge stehen.

I. Bezeichnet $u$ einen positiven Bogen im ersten Quadranten, so haben alle die Bögen

$$u,\ \pi - u,\ 2\pi + u,\ 3\pi - u,\ 4\pi + u,\ 5\pi - u,\ \ldots .$$

welche der Reihe nach im 1sten, 2ten, 5ten, 6ten, 9ten, 10ten, ... Quadranten liegen, den nämlichen Sinus. Überhaupt ist

$$\sin u = \sin\left[\frac{\pi}{2} \mp \left(\frac{\pi}{2} - u\right) + 2k\pi\right]$$

wenn wir $k$ der Reihe nach $= 0, 1, 2, 3, \ldots$ setzen und für jeden Werth von $k$ nach einander das obere und untere Zeichen brauchen. Nennen wir $x$ den gemeinschaftlichen Werth dieser Sinus, so folgt aus $\sin u = x$ die Gleichung $u = Arcsin\, x$, weil unter allen Bögen, welche $x$ zum Sinus haben, $u$ der kleinste (der Voraussetzung nach im ersten Quadranten liegende) ist. Wird aber ganz unbestimmt die Gleichung $\sin w = x$ gegeben, ohne dafs man schon vorher weifs, in welchem Quadranten $w$ liegt, so kann $w$ alle die Werthe

$$u,\ \pi - u,\ 2\pi + u,\ 3\pi - u,\ 4\pi + u,\ \ldots$$

haben, d. h. aus der Gleichung $\sin w = x$ folgt im Allgemeinen

$$w = \frac{\pi}{2} \mp \left(\frac{\pi}{2} - u\right) + 2k\pi$$

oder vermöge des Werthes von $u$,

$$w = \frac{\pi}{2} \mp \left(\frac{\pi}{2} - Arcsin\, x\right) + 2k\pi,$$

wobei für $k = 0$ das obere Zeichen dem ersten Quadranten, das untere

Digitized by Google

dem zweiten, für $k = 1$ das obere dem fünften, das untere dem sechsten Quadranten u. s. w. entspricht.

Sind nun $u$ und $v$ zwei Bögen im ersten Quadranten $\sin u = x$, $\sin v = y$, folglich $u = \mathit{Arcsin}\, x$, $v = \mathit{Arcsin}\, y$ so ist

$$\sin(u+v) = \sin u \cos v + \sin v \cos u$$
$$= x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}$$

mithin nach dem Vorigen

$$u + v = \frac{\pi}{2} \mp \left[\frac{\pi}{2} - \mathit{Arcsin}\,(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2})\right] + 2k\pi,$$

oder

$$\mathit{Arcsin}\, x + \mathit{Arcsin}\, y$$
$$= \frac{\pi}{2} \mp \left[\frac{\pi}{2} - \mathit{Arcsin}\,(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2})\right] + 2k\pi.$$

Hier ist nun noch zu bestimmen, ob das obere oder untere Zeichen und welcher Werth für $k$ genommen werden soll. Die Summe zweier Bögen ist aber entweder ein Bogen im ersten oder zweiten Quadranten, weiter kann derselbe nicht reichen. Es mufs also nach dem Vorigen $k = 0$ und im ersten Falle das obere, im zweiten das untere Zeichen genommen werden. Demnach ist

für $u + v \leqq \frac{\pi}{2}$,

$$\mathit{Arcsin}\, x + \mathit{Arcsin}\, y = \mathit{Arcsin}\,(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}) \quad (1)$$

und für $u + v > \frac{\pi}{2}$,

$$\mathit{Arcsin}\, x + \mathit{Arcsin}\, y = \pi - \mathit{Arcsin}\,(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}) \quad (2)$$

Hier bleibt aber noch eine Frage übrig; nämlich: woran soll man denn erkennen, ob die Summe der Bögen $u$ und $v$ im ersten oder zweiten Quadranten liegt? Hierauf ist die einfache Antwort: am Cosinus, welcher im ersten Quadranten positiv, im zweiten negativ ist. Man hat aber

$$\cos(u+v) = \cos u \cos v - \sin u \sin v$$
$$= \sqrt{1-x^2}\,.\,\sqrt{1-y^2} - xy$$

Man wird folglich die Formel (1) oder (2) brauchen, je nachdem $xy < \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}$ oder $xy > \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}$ ist. Diese Ungleichheiten reduziren sich nach beiderseitiger Quadrirung und Hebung von $x^2y^2$ auf die folgenden

$$x^2 + y^2 < 1 \text{ und } x^2 + y^2 > 1.$$

Digitized by Google

Es ist also für $x^2 + y^2 < 1$,

$$Arcsin\, x + Arcsin\, y = Arcsin\,(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}) \quad (3)$$

und für $x^2 + y^2 > 1$,

$$Arcsin\, x + Arcsin\, y = \pi - Arcsin\,(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}) \quad (4)$$

Durch ähnliche Betrachtungen findet man auch

$$Arcsin\, x - Arcsin\, y = Arcsin\,(x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}) \quad (5)$$

und hier ist weiter keine Bemerkung hinzuzufügen, weil die Differenz zweier Bögen des ersten Quadranten diesen nicht übersteigen kann. Für $y = x$ erhält man $Arcsin\, 0 = 0$, was man ohnehin weifs, für $x = 0$,

$$-Arcsin\, y = Arcsin\,(-y) \quad (6)$$

was der Gleichung $sin\,(-u) = -sin\, u$ entspricht.

Ähnliche Formeln lassen sich leicht für die Funktion $Arccos\, x$ aufstellen. Sie sind aber wenig im Gebrauche, weil man die Behandlung von $Arccos\, x$ leicht durch die Gleichungen

$$Arccos\, z + Arcsin\, z = \frac{\pi}{2} \quad (7)$$

$$Arccos\,(-z) - Arcsin\, z = \frac{\pi}{2} \quad (8)$$

welche unmittelbar aus der geometrischen Betrachtung dieser Funktionen fliefsen, leicht auf die von $Arcsin\, x$ reduzirt.

II. Sei wieder $u$ ein Bogen im ersten Quadranten, so haben alle die Bögen

$$u,\ \pi + u,\ 2\pi + u,\ 3\pi + u,\ \ldots.$$

welche der Reihe nach dem 1sten, 3ten, 5ten, 7ten Quadranten u. s. f. angehören, die nämliche Tangente, nämlich

$$tan\, u = tan\,(k\pi + u)$$

worin $k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$ gesetzt werden kann. Für $tan\, u = x$ ist $u = Arctan\, x$, weil $u$ der kleinste aller zur Tangente $x$ gehörenden Bögen ist. Aus einer Gleichung wie $tan\, w = x$ folgt demnach, wenn man nicht weifs, in welchem Quadranten $w$ liegt,

$$w = k\pi + u = k\pi + Arctan\, x.$$

Für $tan\, u = x$, $tan\, v = y$ ist ferner

$$tan\,(u - v) = \frac{tan\, u - tan\, v}{1 + tan\, u\ tan\, v} = \frac{x - y}{1 + xy}$$

folglich wenn $u$ und $v$ im ersten Quadranten liegen,

$$u - v = k\pi + Arctan\,\frac{x - y}{1 + xy}$$

Digitized by Google

oder

$$Arctan\, x - Arctan\, y = k\pi + Arctan\, \frac{x-y}{1+xy}.$$

Man bemerkt leicht, dafs hier $k = 0$ sein mufs, weil die Differenz zweier Bögen des ersten Quadranten nicht aufserhalb desselben liegen kann. Also ist

$$Arctan\, x - Arctan\, y = Arctan\, \frac{x-y}{1+xy} \qquad (9)$$

Hieraus folgt z. B. für $x = y$, $Arctan\, 0 = 0$ und für $x = 0$,

$$-Arctan\, y = Arctan\, (-y) \qquad (10)$$

Durch ganz ähnliche Betrachtungen findet man leicht

$$Arctan\, x + Arctan\, y = k\pi + Arctan\, \frac{x+y}{1-xy}. \qquad (11)$$

Hier mufs man, wie früher, zwei Fälle unterscheiden. Entweder nämlich liegt $Arctan\, x + Arctan\, y$, d. h. $u + v$ im ersten Quadranten, dann ist $cos\,(u+v) = cos\, u\, cos\, v - sin\, u\, sin\, v$ positiv, mithin $sin\, u\, sin\, v < cos\, u\, cos\, v$ oder $tan\, u\, tan\, v < 1$, d. h. $xy < 1$. In diesem Falle mufs in (11) $k = 0$ sein, weil sonst rechts ein Bogen im dritten Quadranten herauskäme. Ist aber $u + v$ gröfser als $\frac{\pi}{2}$, so wird $cos\,(u+v)$ negativ, mithin $sin\, u\, sin\, v > cos\, u\, cos\, v$, woraus $xy > 1$ folgt. Dann wird der Nenner $1 - xy$ des letzten Ausdruckes in (11) negativ, und nach Formel (10) ist jetzt

$$Arctan\, x + Arctan\, y = k\pi - Arctan\, \frac{x+y}{xy-1}.$$

Da nun links ein Bogen des zweiten Quadranten steht, so mufs rechts $k = 1$ sein, wenn nicht ein negativer Bogen oder ein im 4ten, 6ten u. s. w. liegender herauskommen sollte. Wir haben also für $xy < 1$,

$$Arctan\, x + Arctan\, y = Arctan\, \frac{x+y}{1-xy} \qquad (12)$$

und für $xy > 1$,

$$Arctan\, x + Arctan\, y = \pi - Arctan\, \frac{x+y}{xy-1}. \qquad (13)$$

Man sieht hieraus, dafs die Formel (9), welche für alle positiven $x$ und $y$ richtig ist, nicht unmittelbar für negative $x$ oder $y$ in Anspruch genommen werden darf, weil sich dann die Subtraktion in eine Addition verwandelt.

Digitized by Google

Durch die geometrische Bedeutung der Funktion *Arctan x* überzeugt man sich auch leicht von der Richtigkeit der Gleichung:

$$Arccot\, z + Arctan\, z = \frac{\pi}{2}. \qquad (14)$$

III. Bemerkenswerthe Relationen zwischen *Arcsin x* und *Arctan x* erhält man auch auf folgende Weise:

Bezeichnet $u$ einen spitzen Winkel, so ist

$$tan\, u = \frac{sin\, u}{\sqrt{1 - sin^2 u}}$$

folglich

$$u = Arctan \frac{sin\, u}{\sqrt{1 - sin^2 u}}.$$

Setzen wir hier $sin\, u = x$, so folgt $u = Arcsin\, x$, mithin

$$Arcsin\, x = Arctan \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}, \qquad (15)$$

d. h. der Bogen, dessen Sinus $x$ ist, hat den Ausdruck $\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$ zur Tangente.

Ferner ist für $\frac{\pi}{2} > u > 0$,

$$sin\, u = \frac{tan\, u}{\sqrt{1 + tan^2 u}}$$

oder

$$u = Arcsin \frac{tan\, u}{\sqrt{1 + tan^2 u}}$$

aus $tan\, u = x$ folgt aber, weil $u$ im ersten Quadranten liegt, $u = Arctan\, x$, mithin

$$Arctan\, x = Arcsin \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} \qquad (16)$$

d. h. der Bogen, dessen Tangente $x$ ist, hat den Ausdruck $\frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$ zum Sinus.

## §. 3.

### Die verschiedenen Arten von Funktionen.

Die grofse Unbestimmtheit, welche in dem Begriffe der Funktion im Allgemeinen liegt, macht eine Eintheilung der Funktionen in Klassen nöthig, wobei man als Eintheilungsgrund die verschiedenen Rechnungsope-

Digitized by Google

rationen nimmt, aus welchen die Funktionen hervorgehen. Man theilt nun gewöhnlich die arithmetischen Operationen in zwei Klassen, von denen die erste die Operationen des Addirens, Subtrahirens, Multiplizirens, Dividirens und Potenzirens für constante Exponenten, wozu auch das Wurzelausziehen gehört, in sich begreift und die andere alle übrigen Arten von Operationen umfafst. Die Operationen der ersten Klasse nennt man algebraische, die der zweiten Klasse transscendente und theilt hiernach die Funktionen in algebraische und transscendente. Zu den ersteren gehören alle Funktionen, in welchen mit der darin enthaltenen veränderlichen Gröfse blos algebraische Operationen vorgenommen werden, zu den zweiten die, in welchen die Veränderliche transscendenten Operationen unterworfen wird. Auf die Art und Weise, in welcher die constanten Gröfsen der Funktion auftreten, wird bei dieser Unterscheidung keine Rücksicht genommen.

Die algebraischen Funktionen theilt man noch in rationale und irrationale. Zu den ersteren gehören alle diejenigen, in welchen die veränderliche Gröfse unter keinem Wurzelzeichen, oder was das Nämliche ist, mit keinem gebrochenen Exponenten behaftet vorkommt, vorausgesetzt, dafs man alle angedeuteten Rechnungen so weit als möglich ausgeführt, also die Funktion selbst auf den möglichst einfachsten Ausdruck reduzirt hat. Die letztere Bemerkung ist defshalb nicht ganz überflüssig, weil eine Funktion als nicht rational erscheinen kann, so lange man sie nicht so weit als möglich reduzirt hat, z. B. die Funktion

$$(\sqrt{a} + \sqrt{x})\ (\sqrt{a} - \sqrt{x})$$

die man beim ersten Anblick nicht zu den rationalen rechnen würde, die aber in der That dazu gehört, weil sie sich bei Ausführung der Multiplikation auf $a - x$ reduzirt. Kommen dagegen in einer Funktion Wurzelzeichen vor, die sich nicht durch blofse Reduktion wegschaffen lassen, so heifst dieselbe eine irrationale.

Man unterscheidet bei den algebraischen Funktionen auch noch ganze und gebrochene. Zu den ersten rechnet man die, in deren Nenner die veränderliche Gröfse selbst nicht vorkommt, zu den zweiten die, in welchen die Variable auch im Nenner auftritt. So sind z. B.

$$a + bx + cx^2 \text{ und } \sqrt{a^2 - b^2x^2}$$

eine rationale und irrationale ganze Funktion; dagegen

Digitized by Google

$$\frac{a+bx}{c+dx^2} \text{ und } \frac{a-\sqrt{x}}{cx}$$

eine rationale und irrationale gebrochene algebraische Funktion.

Da in einer rationalen algebraischen Funktion keine anderen Rechnungsoperationen als die vier Spezies und die Erhebung auf eine Potenz von ganzen Exponenten vorkommen dürfen, so sieht man leicht, dafs eine ganze Funktion dieser Art unter der allgemeinen Form

$$A_0 + A_1x + A_2x^2 + \ldots + A_mx^m$$

stehen mufs, in welcher $A_0$, $A_1$, ... $A_m$ constante Zahlen (gleichviel ob ganze oder Brüche) bedeuten, von denen natürlich auch eine oder mehrere $=0$ oder negativ sein können. Der höchste aller vorkommenden Exponenten bestimmt den Grad der Funktion. In unserem Falle ist die Funktion vom Grade $m$, weil die einzelnen Glieder nach den steigenden Potenzen von $x$ geordnet sind, also der letzte Exponent $m$ der gröfste ist. Eine gebrochene rationale algebraische Funktion läfst sich immer auf das allgemeine Schema

$$\frac{A_0 + A_1x + A_2x^2 + \ldots + A_mx^m}{B_0 + B_1x + B_2x^2 + \ldots + B_nx^n}$$

bringen, in welchem $B_0$, $B_1$, ... $B_n$ ebenfalls constante Zahlen sind. Die Differenz der höchsten vorkommenden Exponenten, also hier $m-n$, giebt dann den Grad der Funktion an.

Es kann auch der Fall eintreten, dafs man wohl im voraus weifs, eine gewisse Gröfse sei eine Funktion einer anderen vorhandenen Gröfse, aber die Form dieser Funktion selbst nicht sogleich angeben kann. Z. B. wenn $x$ und $y$ beliebige Gröfsen bedeuten, kann die Gleichung

$$xy - ax + by = c$$

nur dann bestehen, wenn $y$ eine gewisse Funktion von $x$ und ebenso umgekehrt $x$ eine gewisse Funktion von $y$ ist. Denn wenn man dem $x$ einen beliebigen Werth giebt, so ist $y$ schon nicht mehr willkührlich und sein Werth kann durch Auflösung der Gleichung nach $y$ gefunden werden. Ebenso verhält es sich umgekehrt mit $x$. In solchen Fällen, wo man zwar weifs, dafs die eine Gröfse eine Funktion der anderen sei, ohne dafs man ihre Form näher zu bestimmen im Stande ist, nennt man die eine Gröfse eine unentwickelte oder ungesonderte Funktion der anderen. Kann man aber die Form näher angeben, so hat man eine entwickelte oder gesonderte Funktion. Diese Sonderung der Veränderlichen würde sich

Digitized by Google

in der oben angeführten Funktion leicht durch beiderseitige Subtraktion von $ab$ bewirken lassen. Man erhält dann

$$(x + b)(y - a) = c - ab$$

und daraus

$$x = -b + \frac{c - ab}{y - a}, \quad y = a + \frac{c - ab}{x + b}.$$

Ebenso ist in der Gleichung

$$u + x \sin u = 0$$

$u$ so lange eine ungesonderte Funktion von $x$, als man nicht eine Gleichung von der Form $u = \ldots$ aufweisen kann, aus welcher für jedes beliebige $x$ das zugehörige $u$ berechnet werden könnte.

Es giebt endlich noch eine Eintheilung der Funktionen, welche sich aber nicht auf die Operationen, sondern auf die Eigenschaften derselben gründet. Manche Funktionen haben nämlich die Eigenschaft, dafs sie nach einem gewissen Intervalle wieder die Werthe annehmen, die sie früher schon einmal gehabt haben, wie z. B. der Sinus, in welchem $\sin(2\pi + x) = \sin(4\pi + x) = \sin(6\pi + x) \ldots = \sin x$ ist; Funktionen dieser Art heifsen periodische, während alle anderen, welchen die genannte Eigenschaft abgeht, nichtperiodische heifsen. Das Kennzeichen einer periodischen Funktion $f(x)$ ist, dafs es eine constante Gröfse $a$ giebt, für welche

$$f(x) = f(a + x) = f(2a + x) = f(3a + x) \ldots$$

wird, wobei man $a$ das Intervall der Periodizität nennen kann. Für $f(x) = \sin x$ beträgt dasselbe $2\pi$, für $f(x) = \tan x$ ist $a = \pi$. In der niederen Analysis scheiden sich durch diese Eintheilung die goniometrischen Funktionen von den übrigen.

## §. 4.

### Die geometrische Darstellung der Funktionen.

Man kann sich von einer Funktion einer Veränderlichen leicht auf folgende Weise ein Bild verschaffen. Mittelst der Gleichung

$$y = f(x)$$

berechne man zunächst für eine Reihe spezieller Werthe von $x$, die mit

$$x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots$$

bezeichnet werden mögen, die zugehörigen Werthe von $y$, die entsprechend durch die Buchstaben

$$y_1, y_2, y_3, y_4, \ldots$$

Digitized by Google

dargestellt werden sollen. Nun trage man auf einer unbestimmt langen geraden Linie $OX$ (Fig. 1), von einem Punkte $O$ als Anfangspunkt ausgehend, in der Richtung nach $X$ zu die Strecken $OA$, $OB$, $OC$ u. s. w. auf und mache diese, nach irgend einem Maafsstabe gemessen, den Werthen von $x_1$, $x_2$, $x_3$ etc. gleich, also $OA = x_1$, $OB = x_2$, $OC = x_3$ etc. In jedem der Endpunkte $A$, $B$, $C$... dieser Strecken errichte man eine Senkrechte, welche aber alle nach der nämlichen Richtung zu, d. h. entweder alle von $OX$ aus aufwärts oder alle abwärts gezogen werden und gebe diesen Normalen, nach dem nämlichen Maafsstabe gemessen, die Längen der entsprechenden Werthe von $y$, mache also $AP = y_1$, $BQ = y_2$, $CR = y_3$ u. s. f. Verbindet man jetzt alle die Endpunkte $P$, $Q$, $R$... der Senkrechten durch eine zusammenhängende krumme Linie, so stellt diese ein Bild der gegebenen Funktion dar, in welchem die Art und Weise, wie sich die $y$ ändern, je nachdem $x$ gröfser oder kleiner wird, unmittelbar ersichtlich ist. Die Zeichnung selbst wird natürlich um so genauer werden, je mehr man der Werthe $x_1$, $x_2$, $x_3$, ... und je näher an einander man sie annimmt.

Das Verfahren selbst und die Betrachtungen, welche sich an dasselbe knüpfen, wird man aus den folgenden Beispielen genauer kennen lernen.

1) Es sei $f(x) = a$, wo $a$ eine constante Gröfse ist, mithin auch $y = a$; d. h. mit anderen Worten, die Funktion soll so beschaffen sein, dafs sie für verschiedene $x$ nicht verschiedene, sondern immer das nämliche constante $a$ giebt. — Das Bild einer solchen Funktion ist nichts Anderes, als eine Gerade, welche der Linie $OX$ in der Entfernung $a$ parallel läuft. Denn wenn für verschiedene Werthe $x_1$, $x_2$, $x_3$ ... von $x$ immer die nämlichen Werthe $y_1 = y_2 = y_3 \ldots = a$ herauskommen, so liegen die Endpunkte sämmtlicher Normalen in einer Parallelen zu $OX$.

2) Nimmt man $f(x) = ax$, so repräsentirt die Gleichung $y = ax$ eine Gerade, welche die Linie $OX$ unter einem gewissen Winkel schneidet. Geben wir nämlich in Fig. 2 dem $x$ zwei verschiedene Werthe $OA = x_1$, $OB = x_2$, und construiren dazu die Normalen $AP = y_1$, $BQ = y_2$, so ist

$$AP = a \,.\, OA, \quad BQ = a \,.\, OB$$

folglich $$AP : BQ = OA : OB$$

woraus nach bekannten Sätzen der Geometrie folgt, dafs die drei Punkte $O$, $P$, $Q$ in einer Geraden liegen. Da dieſs nun für alle möglichen $P$

Digitized by Google

und $Q$ gilt, so folgt, dafs überhaupt die Endpunkte aller Normalen, welche aus der Gleichung $y = ax$ entstehen, in einer Geraden liegen, die zugleich durch den Punkt $O$ geht. Das Letztere sieht man auch daraus, dafs für $x = 0$ sich $y = 0$ findet, was nichts Anderes bedeutet, als dafs der Endpunkt der Normale an dieser Stelle in die Linie $OX$ fällt, d. h. dafs die Linie, welche die Gleichung $y = ax$ repräsentirt, mit der Geraden $OX$ hier einen Punkt gemein hat, der nur ein Durchschnittspunkt sein kann, weil zwei Gerade einander nicht berühren können.

Setzt man die Gerade, deren Lage durch die Punkte $P$ und $Q$ nun einmal bestimmt ist, über $O$ hinaus fort, so kommt man auf die entgegengesetzte Seite von der Linie $OX$ aus, nämlich in die Gegend unter derselben, wenn man sich früher über derselben befand. Macht man hier $OP' = OP$, $OQ' = OQ$ und zieht die Normalen $P'A'$, $Q'B'$, so sind diese der Gröfse nach wohl den Senkrechten $PA$, $QB$ gleich, der Lage nach aber entgegengesetzt. Das Nämliche gilt von den Strecken $OA'$ und $OB'$, welche in der Richtung von $O$ nach $X'$ fortlaufen, während die früheren von $O$ nach $X$ zu gingen, die Strecken $OA'$, $OB'$ etc. sind der Gröfse nach den auf der rechten Seite liegenden $OA$ und $OB$ gleich, der Richtung nach entgegengesetzt. Diese Gegensätze, welche wir an der geometrischen Darstellung der Funktion $ax$ bemerken, müssen sich aber auch arithmetisch in der Funktion selbst entdecken lassen. Dazu kann man leicht durch Anwendung entgegengesetzter Gröfsen gelangen, welche in der Arithmetik auf ähnliche Weise vorkommen, wie die entgegengesetzten Lagen in der Geometrie. Wir bezeichnen nämlich die nach einer Richtung, etwa in der von $A$ nach $X$ gezogenen Strecken mit positiven $x$, die in der entgegengesetzten Richtung von $O$ nach $X'$ laufenden Strecken mit negativen $x$. Der Satz: „die Linien $OA$ und $OA'$ sind sich an Gröfse gleich, der Richtung nach entgegengesetzt" wird nun ganz einfach durch die beiden Gleichungen $OA = +x_1$, $OA' = -x_1$ ausgedrückt. Nimmt man nun in der Gleichung $y = ax$ die Gröfse $x$ negativ, so wird auch $y$ negativ, und wenn wir diefs nach der eben gemachten Bemerkung dahin deuten, dafs diese neuen Normalen den früheren der Lage nach entgegengesetzt sind, so finden wir dieses Resultat in der schönsten Übereinstimmung mit den vorher geometrisch gefundenen Wahrheiten.

3) Rückt man in Fig. 3 die Linie $OX$, welche die Basis für die Construktion der Gleichung $y = ax$ bildete, um ein Stück $OU = b$ herab und denkt sich nun $U$ als Anfangspunkt der Zeichnung, so hat man



Digitized by Google

$UM = OA$, $MN = OB \ldots$, d. h. die neuen Strecken, welche wir ebenfalls $x$ nennen wollen, sind den früher gebrauchten gleich; dagegen ist $MP = AP + AM$, $NQ = BQ + BN \ldots$, d. h. die neuen Normalen sind gleich den früheren plus einem constanten Stücke $b$. Nennen wir jetzt die neuen Normalen $z$, so wird $z = y + b$, oder statt $y$ sein Werth gesetzt,

$$z = ax + b.$$

Die Funktion $ax + b$ bedeutet daher geometrisch ebenfalls eine gerade Linie, welche sich von der früher für die Funktion $ax$ gefundenen dadurch unterscheidet, daſs ihr Durchschnitt $T$ mit der Basis $UV$ nicht in den Punkt fällt, von welchem aus die Strecken $x$ durchlaufen werden.

Rückt man dagegen die Linie $OX$ um ein Stück $b$ hinauf, so werden alle Normalen um das Stück $b$ verkürzt und man erkennt wieder leicht, daſs die Gleichung $ax - b$ geometrisch ebenfalls eine gerade Linie bedeutet.

4) Es sei die Gleichung $y = \sqrt{x^2 - a^2}$ zu construiren. Fig. 4.

Nimmt man $x = 0$, so wird $y$ unmöglich; dasselbe findet noch statt, so lange $x < a$ ist. Für alle die Strecken $< x$ also, welche man auf der Linie $OX$ von $O$ aus abschneiden könnte, existiren keine Normalen. Für $x = a$ ergiebt sich $y = 0$; der Anfangspunkt der krummen Linie, welche die obige Gleichung repräsentirt, liegt also auf der Geraden $OX$ selbst, etwa in $A$, so daſs $OA = a$ ist. Läſst man nun $x$ immer gröſser werden, so wächst auch $y$ fortwährend und bleibt immer reell, d. h. die Curve erstreckt sich ins Unendliche hinaus. Da man aber eine Quadratwurzel ebensowohl positiv als negativ nehmen kann, so entsprechen einem gegebenen $x$ zwei der Gröſse nach gleiche, dem Zeichen nach entgegengesetzte $y$, d. h. geometrisch; zu jeder Strecke $OM = x$ gehören zwei Normalen, $MP$ und $MQ$, welche an Gröſse einander gleich sind, aber nach entgegengesetzten Richtungen liegen. Gehen wir nun auch auf der anderen Seite von $O$, nämlich von $O$ nach $X'$ fort, so finden wir eine der vorigen congruente Figur. Denn da der Ausdruck $\sqrt{x^2 - a^2}$ nur das Quadrat von $x$ enthält, so giebt er für negative $x$ das Nämliche wie für positive, erzeugt also auch geometrisch die nämliche Figur.

Die krumme Linie, welche das Bild der Funktion $\sqrt{x^2 - a^2}$ darstellt, erstreckt sich also in vier congruenten Zweigen ins Unendliche hinaus, von welchen je zwei in einem Punkte zusammenstoſsen.

Digitized by Google

Eine ähnliche geometrische Darstellung läfst sich für die Funktionen zweier Veränderlichen geben, der wir jedoch eine Bemerkung vorausschicken müssen. Die Lage eines Punktes im Raume ist bestimmt, sobald man seine Entfernungen von drei unter sich senkrechten Ebenen kennt, wenn also für den Punkt $P$ in Fig. 5 die Längen der drei Perpendikel $PB$, $PC$, $PD$ auf die Ebenen $XZ$, $XY$ und $YZ$ gegeben sind. Denn um jetzt den Punkt $P$ aufzufinden, kann man folgendes Verfahren beobachten, dessen Richtigkeit leicht einzusehen ist. Man macht zunächst $OA = PD$, zieht dann $AB \parallel OZ$ und nimmt $AB = PC$, darauf läfst man $BP \parallel OY$, d. h. senkrecht auf der Ebene $XZ$ aufsteigen und macht diese Linie der gegebenen Länge gleich, so erhält man den gesuchten Punkt $P$. Die Gröfsen der Perpendikel $PB$, $PC$, $PD$ können, wie aus jener Construktion erhellt, ganz willkührlich gegeben werden und sind defshalb drei unabhängigen veränderlichen Gröfsen zu vergleichen, so dafs wir setzen können $PD = OA = x$, $PC = AB = z$ und $BP = y$. Machen wir aber unter diesen drei Variablen die eine, etwa $y$, von den beiden anderen abhängig, d. h. setzen wir $y = f(x, z)$, so ist jetzt die Lage des Punktes $P$ nicht mehr ganz willkührlich; denn nachdem man die Linien $OA = x$, $AB = z$ beliebig angenommen hat, bleibt $BP = y$ nicht mehr beliebig, sondern kann vermöge der Gleichung $y = f(x, z)$ bestimmt werden. Lassen wir also $x$ und $z$ sich successive verändern, so wird wohl der Punkt verschiedene, aber defshalb noch nicht ganz willkührliche Lagen einnehmen. Wir wollen dies an einem Beispiele zeigen.

Es sei $f(x, z) = \sqrt{x^2 + z^2}$, also $y = \sqrt{x^2 + z^2}$.

Nehmen wir in Fig. 6 $x = OA$ und $z = AB$ beliebig, so ist die Gröfse von $y$ schon bestimmt, nämlich $= BO$, der Hypotenuse des bei $A$ rechtwinkligen Dreiecks, weil nach dem Pythagoräischen Satze $\sqrt{x^2 + z^2}$ nichts Anderes als diese Hypotenuse bedeutet. Macht man also $BP = BO$, so ist der Punkt $P$ bestimmt. Lassen wir nun einstweilen das $x$ noch ganz unbestimmt, wählen dagegen das $z$ so, dafs das Radikal $\sqrt{x^2 + z^2}$ immer die nämliche Gröfse behält, so bewegt sich für die sich ändernden $x$ der Punkt $B$ in einem Kreise des Halbmessers $BO$, so dafs also für eine andere Stellung $B'O = BO$ ist, mithin, wenn $B'P' = B'O$ gemacht wird, $P'$ die neue Stellung des Punktes $P$ angiebt. Da aber $BP = BO$, $B'P' = B'O$ und $B'O = BO$ ist, so folgt $B'P' = BP$, d. h. der Punkt $P$ bewegt sich in einem Kreise, dessen Ebene der Ebene $XZ$ parallel



Digitized by Google

liegt. — Haben wir nun die $x$ und $z$ so gewählt, dafs der Punkt $B$ eine drehende Bewegung bekam, so können wir sie jetzt auch so wählen, dafs $B$ eine progressive Bewegung auf die Geraden $BO$ erhält. Dazu gehört nur, dafs man die $z$ den $x$ proportional nimmt, dafs also in Fig 7 für $OA = x_1$, $AB = z_1$, $OC = x_2$, $CD = z_2$ ist,

$$x_1 : z_1 = x_2 : z_2,$$

woraus dann folgt, dafs die Punkte $O$, $B$ und $D$ in einer Geraden liegen. Nimmt man nun $BP = BO$, $DQ = DO$, so erhält man zwei entsprechende Örter des Punktes $P$. Man übersieht hier gleich, dafs wie $O$, $B$, $D$, auch $O$, $P$, $Q$ in einer Geraden liegen müssen. Wenn sich also $B$ in einer Geraden fortbewegt, so läuft auch $P$ auf einer Geraden hin.

Lassen wir nun den Punkt $B$ alle möglichen Punkte der Geraden $OD$ ins Unendliche fort durchlaufen und geben ihm an jeder Stelle derselben auch die oben betrachtete drehende Bewegung, so betritt derselbe offenbar alle möglichen Punkte der Ebene $XZ$, d. h. die Gröfsen $x$ und $z$ haben dann alle möglichen Werthe angenommen. Der Punkt $P$ hat dann eine unendliche Menge über einander liegender Kreise durchlaufen, die alle parallel der Ebene $XZ$, deren Mittelpunkte sämmtlich in der Geraden $OY$ liegen und deren Halbmesser sich ihren Entfernungen von $O$ proportional ändern. Der Punkt $P$ beschreibt demnach eine Fläche, welche man sich dadurch entstanden denken kann, dafs ein Kreis mit veränderlichem Halbmesser sich immer einer Ebene (der Ebene $XZ$) parallel und in einer auf ihr senkrechten Richtung fortbewegt, während der Halbmesser in demselben Verhältnisse zunimmt, als die Entfernung von einem festen, in jener Ebene liegenden Punkte (dem Punkte $O$). Diese Fläche ist aber der Mantel eines geraden Kegels, von welchem die Fig. einen Quadranten darstellt. Die übrigen drei Quadranten erhält man dadurch, dafs man entweder $x$, oder $z$, oder beide zugleich in die entgegengesetzte Lage übergehen, d. h. negativ werden läfst. Da $y = \sqrt{x^2 + z^2}$ war, so kann man auch $y$ negativ nehmen, wodurch man einen zweiten, abwärts von der Ebene $XZ$ sich ausbreitenden Kegel bekommt. Die Gleichung

$$y = \sqrt{x^2 + z^2}$$

bedeutet also geometrisch zwei gerade Kegelflächen, die mit den Spitzen an einander stofsen und deren Achsen in einer geraden Linie liegen.

Man könnte nun weiter gehen und fragen, welche ist die geometrische Bedeutung einer Funktion dreier Veränderlichen? Hierauf ist die

Digitized by Google

einfache Antwort: gar keine. Denn um die Funktionen einer Veränderlichen zu construiren, brauchten wir zwei Dimensionen, Länge und Breite, indem wir unsere Construktion in der Ebene ausbreiteten; für die Darstellung der Funktion zweier Veränderlichen waren drei Dimensionen nöthig, also würden wir für Funktionen dreier oder mehrerer Gröfsen vier und mehr Dimensionen herbeischaffen müssen, was geradezu unmöglich ist, weil der Raum nur drei Dimensionen hat. Hier wird also der Calcül der Anschauung überlegen, ein Phänomen, das wir später noch mehrmals zu beobachten Gelegenheit haben werden.

## §. 5.

### Von den Gränzwerthen der Funktionen bei beständiger Zunahme oder Abnahme der Veränderlichen.

Da in einer Funktion die veränderliche Gröfse alle möglichen Werthe annehmen darf, so kann man dieselbe auch auf die Weise sich verändern lassen, dafs sie von irgend einer Stelle an sich beständig vergröfsert, und gröfser als jede angebbare Zahl werden kann, oder dafs sie sich beständig vermindert und kleiner als jede angebbare Zahl werden kann, also sich der Null fortwährend mehr und mehr nähert. Hierdurch wird nun auch eine beständige Veränderung in den Werthen der Funktion herbeigeführt werden, die sich bei der unbestimmten Allgemeinheit, welche in dem Begriffe der Funktion liegt, schlechthin nicht angeben läfst. Man kann aber wenigstens drei Fälle unterscheiden; entweder nämlich durchlaufen bei jener bestimmten Veränderung der Veränderlichen die Werthe der Funktion fast regellos das ganze unendliche Gebiet der Zahlen, oder ein bestimmt abgeschlossenes Stück desselben, oder sie nähern sich mehr und mehr einer bestimmten Gröfse als Gränze. Um für diese drei Fälle Beispiele zu haben, betrachten wir die drei Funktionen

$$a + x, \quad \sin x, \quad a + \frac{1}{x}$$

für beständig wachsende $x$. Die erste nimmt offenbar immer gröfsere und gröfsere Werthe an, je gröfser die in ihr enthaltene Veränderliche wird, und wenn $x$ gröfser als jede angebbare Zahl wird, so übersteigt auch $a + x$ jede noch so grofse gegebene Zahl. Es findet hier also keine Annäherung an eine fest bestimmte Gränze statt.

Die zweite Funktion nimmt von $x = 0$ bis $x = \frac{\pi}{2}$ zu bis zum Wer-

Digitized by Google

the $+1$, ($\sin 0 = 0$, $\sin \frac{\pi}{2} = 1$), von da wieder ab bis $x = \pi$, wo sie wieder Null wird. Darauf bekommt sie negative Werthe, deren kleinster $-1$ für $x = \frac{3\pi}{2}$ eintritt, wird hierauf für $x = 2\pi$ wieder Null und fängt dann dieses Spiel von Neuem an. Sie bewegt sich also für wachsende $x$ zwischen den Gränzen $+1$ und $-1$ hin und her, ohne sich einem bestimmten Werthe zu nähern.

In der dritten Funktion endlich nimmt für wachsende $x$ der Quotient $\frac{1}{x}$ immer ab. Denn setzen wir der Reihe nach $x = n$, $n+1$, $n+2$, ... wo $n$ eine beliebige positive Zahl bedeutet, so hat man

$$\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} > \frac{1}{n+2} > \frac{1}{n+3} \cdots$$

Diese Abnahme geht aber so weit, dafs $\frac{1}{n}$ kleiner werden kann, als jede noch so kleine angebbare Gröfse. Soll nämlich $\frac{1}{n} < \varrho$ sein, wo $\varrho$ irgend eine beliebige kleine Gröfse bedeutet, so braucht man blos $n > \frac{1}{\varrho}$ zu nehmen, um sogleich die Forderung zu erfüllen. Die Gränze, welcher sich $\frac{1}{n}$ nähert, mufs folglich die Null sein. Mithin nähert sich die Funktion $a + \frac{1}{x}$ für wachsende $x$ beständig der Gränze $a$.

Wir wollen diese bei verschiedenen Funktionen eintretenden Annäherungen an feste Gränzen noch etwas deutlicher zu machen suchen. Schon in der Arithmetik begegnet man der Erscheinung einer fortwährenden Annäherung an einen gewissen Gränzwerth, und zwar zum ersten Male bei der Verwandlung eines gewöhnlichen Bruches in einen Dezimalbruch. So ist z. B. $\frac{1}{9} = 0{,}11111\ldots$, d. h.

$$\frac{1}{9} = \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \frac{1}{10^4} + \cdots$$

wobei man sich diese Reihe ins Unendliche fortgesetzt zu denken hat. Man kann sich aber vorstellen, dafs diese unendliche Reihe dadurch entstanden sei, dafs man in der endlichen

Digitized by Google

$$\frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \cdots + \frac{1}{10^n},$$

welche $n$ Glieder enthält, die Zahl $n$ ins Unendliche habe wachsen lassen. Die Summe dieser endlichen Reihe ist aber offenbar eine Funktion von $n$, weil sie eine andere sein wird, je nachdem man mehr oder weniger Glieder zusammennimmt, d. h. je nachdem die Gliederanzahl $n$ gröfser oder kleiner ist. Setzen wir also

$$\frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \cdots + \frac{1}{10^n} = f(n),$$

so ist jetzt $f(n)$ eine Funktion, welche sich für wachsende $n$ unbegränzt und bis zu jedem Grade der Genauigkeit der Gränze 9 nähert, weil dies auf der linken Seite der Fall ist.

Etwas ganz Ähnliches findet bei den Irrationalzahlen statt. Denn es ist z. B. $\sqrt{2} = 1{,}414213\ldots$ oder

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{4}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{4}{10^3} + \frac{2}{10^4} + \frac{1}{10^5} + \cdots$$

wobei nun $\sqrt{2}$ nichts Anderes bedeutet als den Gränzwerth, welchem man sich fortwährend nähert, wenn man immer mehr und mehr Glieder der Reihe rechts zusammennimmt.

Auch geometrisch läfst sich die Erscheinung der beständigen Annäherung an eine feste Gränze deutlich machen. Suchen wir z. B. die krumme Linie, welche das Bild der Funktion $a + \frac{1}{x}$ darstellt, indem wir $a + \frac{1}{x} = y$ setzen, so erhalten wir für $x = 1, 2, 3, \ldots$ der Reihe nach $y = a + 1$, $a + \frac{1}{2}$, $a + \frac{1}{3}$, $\ldots$ d. h. Gröfsen, welche immer weniger und weniger von $a$ differiren. Construiren wir dieselben als Normalen, so entsteht eine krumme Linie, welche sich mehr und mehr einer in der Entfernung $a$ zu $OX$ parallel gezogenen Geraden nähert, ohne dieselbe jemals erreichen zu können. (Fig. 8.)

Dafs in der That eine solche fortwährende Annäherung an eine Gränze möglich ist, ohne dafs man jemals behaupten könnte, diese selbst erreicht zu haben, liegt an der unendlichen Theilbarkeit der Dinge, d. h. darin, dafs man bei dem Regressus der successiven Theilung einer Gröfse niemals auf einen letzten untheilbaren Theil stöfst. Ziehe ich z. B. einen Strich von $A$ nach $B$, Fig. 9, so kann ich mir denken, ich hätte

Digitized by Google

erst die Hälfte desselben $AM$ vollendet, dann von der übrigen bleibenden Hälfte $MB$ die Hälfte $MN$, hierauf von dem übrigen Stücke $NB$ wieder die Hälfte $NP$, dann von diesem wieder die Hälfte $PQ$ u. s. f. Hier wird also eine vollendete Gröfse $AB$ in eine Reihe immer kleinerer Theile zerlegt, in eine Reihe, welche sich nie schliefst, weil man bei der Theilung selbst nie auf ein untheilbares Letztes kommt. Statt dieses regressiven Verfahrens der Theilung ohne Ende könnte man jetzt umgekehrt das progressive der Zusammensetzung des Ganzen aus seinen Theilen versuchen. Dieſs ist nun zwar eine ebenso unvollendbare Operation, wie die vorige der Zerlegung, weil hinter jedem schon mitgezählten Theile ein anderer kleinerer kommt, der ebenfalls mitgerechnet sein will; aber man weifs doch schon im Voraus, was herauskommen würde, wenn man wirklich alle Theile zusammenrechnen könnte, offenbar nämlich dasselbe, was man vorher getheilt hatte. Es ist also

$$AB = AM + MN + NP + PQ + \ldots . \text{ in inf.}$$

d. h.

$$AB = \frac{1}{2}AB + \frac{1}{4}AB + \frac{1}{8}AB + \ldots .$$

folglich auch:

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots .$$

d. i.

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \ldots .$$

Da hier aber die wirkliche Ausführung der Summation ins Unendliche hinab eine bloſse Idee und in Wirklichkeit nicht ausführbar ist, so muſs man sich dieser Idee wenigstens zu nähern suchen, und dies geschieht mittelst des Begriffes der Gränze. Nehmen wir also jene Reihe vorerst als eine endliche und betrachten ihre Summe als Funktion ihrer Gliederanzahl, setzen also:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots . + \frac{1}{2^n} = f(n),$$

so ist jetzt $f(n)$ eine Funktion von $n$, welche sich für wachsende $n$ mehr und mehr einer bestimmten Gränze nähert, nämlich der Einheit; in der That ergiebt sich, wenn man der Reihe nach ein, zwei, drei und mehr Glieder zusammennimmt,

$$f(1) = \frac{1}{2},\ f(2) = \frac{3}{4},\ f(3) = \frac{7}{8},\ f(4) = \frac{15}{16},\ \ldots$$

Digitized by Google

also Zahlen, welche immer weniger von 1 verschieden sind. Nimmt man also auf einer Geraden $ox$ in Fig. 10,

$$oa = 1,\ ob = 2,\ oc = 3,\ od = 4,\ \ldots$$

und in den Punkten $a, b, c, d \ldots$ die Normalen

$$am = \frac{1}{2},\ bn = \frac{3}{4},\ cp = \frac{7}{8},\ dq = \frac{15}{16},\ \ldots$$

so liegen die Punkte immer näher und näher an einer Geraden $BZ$, welche in der Entfernung $AB = 1$ der Linie $ox$ parallel gezogen ist, ohne dieselbe je erreichen zu können.

Zur Bezeichnung der Gränze, welcher sich eine Funktion für wachsende oder abnehmende Werthe ihrer Veränderlichen beständig nähert, bedient man sich des Zeichens *Lim* (von *Limes* die Gränze), welches man vor den Ausdruck setzt, dessen Gränze angegeben werden soll. Der Sinn einer Gleichung wie

$$Lim\ \left(a + \frac{1}{x}\right) = a,\ \text{für wachsende } x,$$

ist hiernach: für wachsende $x$ nähert sich die Funktion $a + \frac{1}{x}$ der Gränze $a$; ebenso sagt die Gleichung

$$Lim\ \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^n}\right] = 1,\ \text{für wachsende } n,$$

nichts Anderes, als: je mehr Glieder der Reihe man summirt, desto weniger differirt diese Summe von der Einheit.

Die Bestimmung der Gränze, welcher sich eine Funktion für abnehmende Werthe der Veränderlichen nähert, ist leicht auf den Fall einer Gränzbestimmung für wachsende Werthe zurückzuführen. Hätte man nämlich für abnehmende $\delta$ die Gränze $Lim\ f(\delta)$ zu bestimmen, so kann man sich die Abnahme des $\delta$ dadurch entstehend denken, dafs man $\delta = \frac{1}{n}$ setzt und jetzt die beliebige Zahl $n$ fortwährend wachsen läfst. Es kommt also dann die Bestimmung von $Lim\ f(\delta)$ für abnehmende $\delta$ auf die Bestimmung von $Lim\ f\left(\frac{1}{n}\right)$ für wachsende $n$ zurück. Auch umgekehrt gilt etwas Ähnliches. Aus $\delta = \frac{1}{n}$ folgt nämlich $n = \frac{1}{\delta}$; läfst man hier $\delta$ immer kleiner werden, so wächst $n$ fortwährend und kann jede noch so grofse gegebene Zahl übersteigen, wenn man nur $\delta$ klein genug nimmt. Hat man also $Lim\ f(n)$ für wachsende $n$ aufzusuchen, so kann man

Digitized by Google

$n = \frac{1}{\delta}$ setzen, wo jetzt $\delta$ eine beständig abnehmende Gröfse ist, und reduzirt jetzt jene Aufgabe auf die Bestimmung von $Lim\, f\left(\frac{1}{\delta}\right)$ für abnehmende $\delta$.

Dafs der Quotient $\frac{1}{n}$ kleiner gemacht werden kann, als jede angebbare Zahl, wenn man nur $n$ grofs genug nimmt, läfst sich auch durch die Gleichung

$$Lim\left(\frac{1}{n}\right) = 0, \text{ für wachsende } n,$$

bezeichnen. Umgekehrt aber läfst sich keine Gränze angeben, der sich der Quotient $\frac{1}{\delta}$ für abnehmende $\delta$ näherte, weil derselbe gröfser als jede angebbare Zahl gemacht werden kann. Um aber eine Gleichförmigkeit in der Bezeichnung herbeizuführen, hat man eine beständig wachsende Gröfse, die jede gegebene Zahl übersteigen kann, mit dem Zeichen $\infty$ belegt, so dafs man also auch setzen kann

$$Lim\left(\frac{1}{\delta}\right) = \infty, \text{ für abnehmende } \delta.$$

Man mufs sich hüten, hier das Zeichen $\infty$ für eine bestimmte Gröfse zu halten, wie etwa eine Zahl; der Sinn der obigen Gleichung ist ganz einfach; wollte man die Gränze suchen, der sich $\frac{1}{\delta}$ für abnehmende $\delta$ nähert, so müfste man über jede noch so grofse gegebene Zahl hinausgehen, was eine unausführbare Idee ist. Man darf sich auch nicht einfallen lassen, mit den Zeichen 0 und $\infty$ nach den Regeln der Arithmetik rechnen zu wollen. Denn die Arithmetik lehrt uns blos mit endlichen bestimmten Gröfsen, nicht aber mit einem Nichts oder einem sich beständig ändernden Dinge rechnen; man würde sich also eine ganz überrechtliche, willkührliche Ausdehnung der arithmetischen Regeln zu Schulden kommen lassen*).

*) Gegen diese Regel ist bis in die neueste Zeit herein vielfach gefehlt worden. So sagt z. B. Johann Schultz (in seinem „Versuch einer genauen Theorie des Unendlichen"): „löst man die Gleichung $x + a = x$ auf, so kommt $x - x = a$, $(1-1)x = a$, $x = \frac{a}{1-1} = \frac{a}{0} = \infty$." Das ist total falsch. Denn hier wird nach der algebraischen Regel geschlossen: für $bx = a$ ist $x = \frac{a}{b}$. Aber woher erhält die Algebra diese Regel? Dadurch, dafs sie beiderseits mit $b$ dividirt, wodurch $\frac{b}{b}x = \frac{b}{a}$

Digitized by Google

## §. 6.

### Bestimmung einiger Gränzwerthe.

Wir wollen für diesen Paragraphen, um des beständigen Zusatzes: für wachsende oder für abnehmende $x$ überhoben zu sein, eine beständig abnehmende Gröfse mit $\delta$ und eine über alle Gränzen hinaus wachsende mit $\omega$ bezeichnen, so dafs man aus der Bezeichnung selbst gleich erkennt, ob man den Gränzwerth eines Ausdruckes für abnehmende oder wachsende Werthe der Veränderlichen zu suchen habe. Als Anhaltepunkt für weitere Gränzbestimmungen dienen die bisher gefundenen Gleichungen

$$Lim\ \delta = 0, \quad Lim\ \omega = \infty$$

$$Lim\ \frac{1}{\delta} = \infty, \quad Lim\ \frac{1}{\omega} = 0$$

von denen die ersten zwei aus dem Begriffe von $\delta$ und $\omega$ selbst hervorgehen, die zwei letzten im vorigen Paragraphen bewiesen worden sind. Mit diesem einfachen Apparate ausgerüstet, wollen wir nun eine Reihe von Beispielen durchgehen.

1) Hätte man $Lim\ \frac{a\delta}{b\delta}$ zu bestimmen, worin $a$ eine constante Gröfse bezeichnet, so braucht man nur das $\delta$ im Zähler und Nenner zu heben, um sogleich die Gränze zu finden. Dafs es erlaubt sei, das $\delta$ im Nenner gegen das im Zähler stehende zu streichen, obgleich die $\delta$ sich beständig ändern, erhellt daraus, dafs die Gröfse $\delta$, wie klein man sie auch nehmen mag, doch immer sich selbst gleich sein mufs; setzt man also im Zähler

---

entsteht, und nun $\frac{b}{b} = 1$ nimmt. Für die obige Schultzische Rechnung ist $b = 1 - 1$, also $\frac{b}{b} = \frac{1-1}{1-1} = 1$. Wenn das richtig wäre, so könnte man beweisen, dafs jede Zahl jeder anderen gleich wäre, z. B. $3 = 7$. Denn es ist offenbar $3 - 3 = 7 - 7$, d. h. $(1-1)3 = (1-1)7$, folglich nach beiderseitiger Division mit $(1-1)$,

$$\frac{1-1}{1-1}3 = \frac{1-1}{1-1}7$$

und da $\frac{1-1}{1-1} = 1$ sein soll, $3 = 7$.

Man sieht hier ein ganz eclatantes Beispiel von der widerrechtlichen Ausdehnung arithmetischer Regeln und von den Resultaten, welche dieselbe giebt. Für jedes bestimmte Quantum $b$ ist allerdings $\frac{b}{b} = 1$, aber dagegen ist nicht immer $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty} = 1$, wie sich im nächsten Paragraphen zeigen wird.

Digitized by Google

für $\delta$ einen auch noch so kleinen Bruch, so wird man für das im Nenner befindliche $\delta$ offenbar den nämlichen Bruch setzen müssen, wobei man in jedem Falle heben kann. Es ist also $Lim \frac{a\delta}{b\delta} = \frac{a}{b}$, wie man auch schon daraus sieht, dafs die Funktion $y = \frac{ax}{bx}$ eine Constante ist, die für alle Werthe von $x$, also auch noch so kleine, den nämlichen Werth von $y$ giebt.

Wollte man in der Funktion $\frac{a\delta}{b\delta}$ statt zu heben, gleich sagen: im Zähler nähert sich $\delta$ der Null, folglich auch $a\delta$ der Null und ähnlich im Nenner, so würde man auf den unbrauchbaren Ausdruck $\frac{0}{0}$ stofsen, mit dem sich defshalb nichts weiter anfangen läfst, weil die Arithmetik uns nicht mit ihm rechnen gelehrt hat. Indessen wissen wir dieses Mal doch, was er bedeutet, nämlich soviel als $Lim \frac{a\delta}{b\delta}$, und da dieſs $= \frac{a}{b}$ ist, so haben wir für diesen Fall

$$\frac{0}{0} = \frac{a}{b},$$

so dafs also $\frac{0}{0}$ jede beliebige endliche Gröfse bezeichnen kann.

2) Es sei $Lim \frac{a\delta^2}{b\delta}$ zu bestimmen. Hebt man hier das $\delta$ des Nenners gegen ein $\delta$ des Zählers, was offenbar für jedes auch noch so kleine $\delta$ richtig ist, so ist

$$\frac{a\delta^2}{b\delta} = \frac{a}{b}\delta$$

mithin auch

$$Lim \frac{a\delta^2}{b\delta} = Lim \frac{a}{b}\delta.$$

Da aber $\delta$ immer kleiner wird, so verkleinert sich auch $\frac{a}{b}\delta$ beständig und es nähern sich also $\delta$ und $\frac{a}{b}\delta$ gleichzeitig der Null. Folglich ist

$$Lim \frac{a\delta^2}{b\delta} = 0.$$

Wollte man hingegen, ohne zu heben, so schliefsen: für abnehmende $\delta$ nähert sich $\delta^2$, folglich auch $a\delta^2$ und ebenso $b\delta$ der Null, so würde man

Digitized by Google

$$Lim \frac{a\delta^2}{b\delta} = \frac{0}{0}$$

finden, so dafs in diesem Falle wegen des vorigen Gränzwerthes

$$\frac{0}{0} = 0$$

sein mufs.

3) Es sei $Lim \frac{a\delta}{b\delta^2}$ aufzusuchen. Hebt man hier das $\delta$ im Zähler gegen ein $\delta$ im Nenner, so bleibt

$$Lim \frac{a\delta}{b\delta^2} = Lim \frac{a}{b\delta} = Lim \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{\delta}.$$

Nun wird aber $\frac{1}{\delta}$ immer gröfser, je mehr $\delta$ abnimmt, folglich mufs auch der Ausdruck $\frac{a}{b} \cdot \frac{1}{\delta}$ für abnehmende $\delta$ beständig wachsen. Es wird also

$$Lim \frac{a\delta}{b\delta^2} = \infty$$

Wollte man $\delta$ nicht heben, sondern sagen: bei abnehmenden $\delta$ nähern sich $a\delta$ und $b\delta^2$ gleichzeitig der Null, so erhielte man

$$Lim \frac{a\delta}{b\delta^2} = \frac{0}{0}$$

und durch Vergleichung mit dem vorigen Gränzwerthe

$$\frac{0}{0} = \infty.$$

Man sieht hieraus, dafs der Ausdruck $\frac{0}{0}$ ganz unbestimmt und vieldeutig ist, da er sowohl jede endliche Gröfse $\frac{a}{b}$, wie auch 0 und $\infty$ bedeuten kann. Welchem von diesen Werthen in jedem speziellen Falle der Ausdruck $\frac{0}{0}$ gleich zu setzen sei, kann man nur dann erfahren, wenn man die Entstehungsweise der beiden Nullen kennt, d. h. wenn man den Ausdruck $\frac{0}{0}$ als Gränze einer anderweit gegebenen Funktion betrachtet.

4) Es sei die Gränze zu bestimmen, welcher sich der Ausdruck $\frac{\sin x}{x}$ für abnehmende $x$ nähert.

Wollte man hier im Zähler und Nenner $x$ abnehmen lassen, so würde

Digitized by Google

man zuletzt für $x = 0$ erhalten $\frac{0}{0}$, womit weiter nichts anzufangen ist. Wir müssen also einen anderen Weg versuchen. Es ist aber offenbar der Bogen gröfser als sein Sinus, mithin wenn man mit dem Gröfseren in das Kleinere dividirt, der Quotient ein ächter Bruch, also

$$\frac{\sin x}{x} < 1.$$

Ferner ist der Bogen kleiner als seine Tangente; dividirt man also mit beiden in den Sinus, so erscheint, da der gröfsere Quotient, wo mit dem Bogen als dem Kleineren dividirt wurde, d. h. es ist

$$\frac{\sin x}{x} > \frac{\sin x}{\tan x} \text{ oder } \frac{\sin x}{x} > \cos x.$$

Wir haben jetzt zwei Gränzen, zwischen denen der Quotient $\frac{\sin x}{x}$ liegt, nämlich

$$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x$$

und dieſs gilt, wenn man auch für $x$ eine noch so kleine Gröfse $\delta$ setzt. Läfst man aber $\delta$ immer kleiner werden, so rücken die beiden Gränzen 1 und $\cos \delta$, zwischen denen $\frac{\sin \delta}{\delta}$ liegt, immer näher an einander, weil die Cosinus sehr kleiner Bögen nur sehr wenig von der Einheit differiren, und wenn endlich $\delta$ selbst die Gränze seiner Abnahme, d. h. die Null, erlangt haben sollte, so sind die Gränzen 1 und $\cos 0$ selbst identisch und nun mufs $\frac{\sin \delta}{\delta}$ selbst $= 1$ sein, weil es nicht gröfser als die Gränze 1 und nicht kleiner als die Gränze $\cos 0$ sein kann.

Man sieht dieſs auch leicht aus der geometrischen Darstellung in Fig. 11. Sei nämlich $OA$ senkrecht auf $OX$, der Länge nach $= 1$ und $AB \parallel OX$, ferner sei die krumme Linie $AP'P$ das Bild der Funktion $\cos x$; diese Curve geht durch den Punkt $A$, weil $\cos 0 = 0$ ist. Für $OM = x$ haben wir $MP = \cos x$, $MQ = 1$; zwischen beiden mufs nun ein Punkt der durch $\frac{\sin x}{x}$ dargestellten Curve liegen, weil dieser Quotient $> \cos x$ und $> 1$ sein soll; nehmen wir also $MR = \frac{\sin x}{x}$, so liegt der Punkt $R$ zwischen den Punkten $P$ und $Q$. Dieſs gilt, wie klein auch $OM = x$ genommen werden mag. Für $OM' = \delta < x$ liegt

Digitized by Google

also auch $R'$ zwischen $P'$ und $Q'$. Diese Punkte $P'$ und $Q'$ rücken aber einander immer näher und fallen in $A$ zusammen, es mufs also auch der Punkt $R'$, welcher immer zwischen ihnen liegen soll, am Ende in den Punkt $A$ fallen, wenn $OM' = \delta = 0$ geworden ist. Wir haben also

$$Lim \frac{sin\ \delta}{\delta} = 1. \qquad (1)$$

Hätte man etwas allgemeiner die Gränze zu bestimmen, welcher sich der Ausdruck $\frac{sin\ \alpha\delta}{\delta}$ nähert, worin $\alpha$ eine beliebige constante Gröfse $\delta$ bezeichnet, so ist offenbar

$$Lim \frac{sin\ \alpha\delta}{\delta} = Lim \left(\alpha \frac{sin\ \alpha\delta}{\alpha\delta}\right)$$

und hier ist nun $\alpha\delta$ eine Gröfse, welche unbegränzt abnimmt, wenn $\delta$ abnimmt; wenn wir also $\alpha\delta = \delta'$ setzen, so ist

$$Lim \frac{sin\ \alpha\delta}{\delta} = Lim \left(\alpha \frac{sin\ \delta'}{\delta'}\right)$$

wobei nun $\delta'$ gerade so eine bis zur Gränze Null abnehmende Gröfse bezeichnet, wie früher $\delta$. Da nun $\alpha$ sich nicht ändert, wenn $\delta'$ abnimmt, so ist jetzt

$$Lim \frac{sin\ \alpha\delta}{\delta} = \alpha. \qquad (2)$$

5) Setzt man in der Gleichung

$$Arctan\ x + Arctan\ y = Arctan \frac{x+y}{1-xy}$$

$y = \frac{1}{x+\delta}$, so erhält man nach einer leichten Reduktion auf der rechten Seite

$$Arctan\ x + Arctan \frac{1}{x+\delta} = Arctan \frac{x\,(x+\delta)+1}{\delta}.$$

Lassen wir hier $\delta$ immer kleiner werden, so nähert sich $x+\delta$ der Gränze $x$ und der Quotient

$$\frac{x\,(x+\delta)+1}{\delta}$$

wächst ins Unendliche hinaus, so dafs er jede gegebene Zahl übersteigen kann. Je gröfser aber die Tangente eines Bogens ist, desto näher liegt der Bogen selbst an $\frac{\pi}{2}$, weil umgekehrt die Tangenten ins Unendliche wachsen, wenn man näher und näher an $\frac{\pi}{2}$ kommt. Der Bogen also,

Digitized by Google

welcher jenen Quotienten zur Tangente hat, nähert sich mehr und mehr der Gränze $\frac{\pi}{2}$. Gehen wir nun rechts und links zu den Gränzen für abnehmende $\delta$ über, so erhalten wir die wichtige Gleichung

$$Arctan\, x + Arctan\, \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}. \qquad (3)$$

Wir wollen uns nun mit der Aufsuchung einiger Gränzen für wachsende Werthe der Veränderlichen beschäftigen.

6) Zuerst bemerkt man leicht, dafs der Ausdruck $\frac{\infty}{\infty}$ denselben Charakter der Unbestimmtheit und Vieldeutigkeit an sich trägt, wie der entsprechende $\frac{0}{0}$, wobei man zu beachten hat, dafs in jedem Ausdrucke das Zeichen $\infty$ nicht etwa ein bestimmtes Quantum als Ganzes genommen, sondern eine beständig fort wachsende Gröfse bezeichnet. Um sich immer daran zu erinnern, kann man etwa setzen

$$\infty = 1 + 1 + 1 + 1 + \ldots \text{ und immer so fort}$$

und diefs als Definition von $\infty$ festhalten. Wenn man nun in den Ausdrücken

$$\frac{a\omega}{b\omega},\ \frac{a\omega^2}{b\omega},\ \frac{a\omega}{b\omega^2}$$

$\omega$ ins Unendliche wachsen läfst, so gehen sie in die gemeinschaftliche Form $\frac{\infty}{\infty}$ über. Hebt man dagegen Zähler und Nenner mit $\omega$, was für jedes auch noch so grofse $\omega$ erlaubt ist, so findet man der Reihe nach

$$Lim\, \frac{a\omega}{b\omega} = \frac{a}{b}$$

$$Lim\, \frac{a\omega^2}{b\omega} = \infty$$

$$Lim\, \frac{a\omega}{b\omega^2} = 0$$

so dafs also der Ausdruck $\frac{\infty}{\infty}$ ebensowohl eine endliche Gröfse $\frac{a}{b}$, als $\infty$ und 0 bedeuten kann. Man darf daher auch mit dem Quotienten $\frac{\infty}{\infty}$ nicht schlechthin rechnen, sondern nur in so fern, als derselbe einem Gränzenübergange seine Entstehung verdankt.

7) Um den Gränzwerth des Quotienten

Digitized by Google

$$\frac{a+\omega}{\omega}$$

zu ermitteln, braucht man nur mit dem Nenner in jedes Glied des Zählers zu dividiren, wodurch die Gleichung

$$\frac{a+\omega}{\omega} = \frac{a}{\omega} + 1 = 1 + a \cdot \frac{1}{\omega}$$

erscheint und in dieser $\omega$ ins Unendliche wachsen zu lassen. Man erhält dann

$$Lim \frac{a+\omega}{\omega} = 1 \qquad (4)$$

weil $Lim \frac{1}{\omega}$, also auch $Lim \frac{a}{\omega} = 0$ ist.

8) Es sei die Gränze des Ausdrucks

$$\frac{\omega}{a+\omega}$$

aufzusuchen. Man kann hier auf doppelte Weise verfahren; einmal nämlich ist

$$\frac{\omega}{a+\omega} = 1 - \frac{a}{a+\omega}$$

und dann auch durch Division des Zählers und Nenners mit $\omega$:

$$\frac{\omega}{a+\omega} = \frac{1}{\frac{a}{\omega}+1}.$$

In der ersten Form nimmt für wachsende $\omega$ der Quotient $\frac{a}{a+\omega}$ beständig ab und nähert sich fortwährend der Null. Man bekommt also durch Übergang zur Gränze

$$Lim \frac{\omega}{a+\omega} = 1. \qquad (5)$$

In der zweiten Form wird der Quotient $\frac{a}{\omega}$ immer kleiner und nähert sich der Gränze 0, folglich der ganze Nenner $1 + \frac{a}{\omega}$ der Gränze 1; mithin ist wieder

$$Lim \frac{\omega}{a+\omega} = 1$$

wie vorher.

Man leitet ebenso leicht das allgemeinere Theorem ab:

$$Lim \frac{b+\omega}{a+\omega} = 1 \qquad (6)$$



Digitized by Google

welches sich auch in Worten ausdrücken läfst, nämlich: „Addirt man zu Zähler und Nenner eines Bruches dieselben, aber immer gröfsere Zahlen, so nähert sich der Werth desselben fortwährend der Einheit.“

So nähern sich z. B. die Brüche

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \ldots$$

$$\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \ldots$$

die dadurch entstehen, dafs man im Zähler und Nenner immer 1 addirt, immer fort der Einheit, wie man auch daraus sieht, dafs man sie so schreiben kann:

$$1-\frac{1}{2}, 1-\frac{1}{3}, 1-\frac{1}{4}, 1-\frac{1}{5}, 1-\frac{1}{6}, \ldots$$

$$1+\frac{1}{1}, 1+\frac{1}{2}, 1+\frac{1}{3}, 1+\frac{1}{4}, 1+\frac{1}{5}, \ldots$$

wobei in der ersten Reihe eine beständige Zunahme, in der zweiten eine Abnahme statt findet*).

9) Ein wichtiger hieher gehörender Satz ist noch der, dafs für jedes $a > 1$,

$$Lim\ a^{\omega} = \infty$$

ist. Man sieht die Richtigkeit desselben leicht auf den ersten Blick ein, wenn $a$ eine ganze Zahl $> 1$ ist, dagegen erhellt dieſs nicht so unmittelbar, wenn $a$ nur wenig von der Einheit differirt. Man kann sich dann auf folgende Weise überzeugen. Sei $a = 1 + b$, wo $b$ eine noch so grofse oder kleine constante, aber nothwendig positive Gröfse ist. Man hat dann:

*) Unter den wunderlichen Sätzen, die man bis in die jetzige Zeit über das Unendliche vorgebracht hat, gehört unter Anderem auch der: „eine unendliche Gröfse wird durch Hinzuthun einer endlichen nicht verändert, oder es ist $\infty \pm a = \infty$.“ Das ist völlig falsch; eine Gröfse ändert sich allemal, wenn man etwas dazu thut oder wegnimmt; aber das Verhältnifs zweier Gröfsen, d. h. der Quotient $\frac{x}{x \pm a}$, kann sich anfangs rascher und bei grofsen $x$ langsamer ändern und sich im letzteren Falle nach einem gewissen Endwerthe zu bewegen, den er in Wirklichkeit nie erlangt (wegen des Gesetzes der Stetigkeit), dessen Existenz aber nachgewiesen werden kann. In dieser Weise aufgefafst, hat die Betrachtung unendlich wachsender oder abnehmender Gröfsen gar keine Schwierigkeit; dagegen sie in ihrer bisherigen höchst unphilosophischen Abfassung die dunkelste Partie der Analysis bildete und von jeher der streitige Punkt war.

Digitized by Google

$$(1+b)^2 = 1 + 2b + b^2$$

folglich

$$(1+b)^2 > 1 + 2b.$$

Daraus folgt durch Multiplikation mit $1+b$:

$$(1+b)^3 > 1 + 3b + 2b^2$$

mithin

$$(1+b)^3 > 1 + 3b.$$

Fernere Multiplikation mit $1+b$ giebt

$$(1+b)^4 > 1 + 4b + 3b^2$$

mithin

$$(1+b)^4 > 1 + 4b$$

u. s. f. Überhaupt findet sich für eine beliebige ganze Zahl $n$,

$$(1+b)^n > 1 + nb.$$

Wie grofs oder klein nun auch die Gröfse $b$ sein mag, so kann man doch dadurch, dafs man sie hinreichend vielmal nimmt, das Produkt $nb$ gröfser als jede angebbare Zahl machen. Es übersteigt also auch $1+nb$ bei wachsenden $n$ jede angebbare Zahl, folglich ist um so mehr, wenn $\omega$ für $n$ gesetzt wird,

$$Lim\ (1+b)^\omega = \infty$$

oder

$$Lim\ a^\omega = \infty \qquad (7)$$

sobald $a > 1$ ist.

Da $a^\omega$ gröfser als jede angebbare Zahl werden kann, so läfst sich $\frac{1}{a^\omega} = a^{-\omega}$ kleiner als jeder noch so kleine angebbare Bruch machen. Es ist daher

$$Lim\ a^{-\omega} = 0. \qquad (8)$$

Wir wollen endlich noch einige allgemeine Sätze über die Gränzen aufstellen.

Nähert sich, gleichviel ob für wachsende oder abnehmende $x$, die Funktion $\varphi(x)$ der Gränze $a$, ist also $Lim\ \varphi(x) = a$, so können wir umgekehrt $\varphi(x) = a + \delta$ setzen, wobei $\delta$ eine Gröfse bezeichnet, die bis zur Null abnimmt, wenn man in $\varphi(x)$ zur Gränze übergeht. Ebenso folgt aus $Lim\ \psi(x) = b$, $\psi(x) = b + \delta'$, worin $\delta'$ ebenfalls eine Gröfse ist, welche bis zur Null abnimmt, wenn man in $\psi(x)$ den angedeuteten Gränzenübergang vollzieht. Man hat folglich

$$\varphi(x)\,\psi(x) = (a+\delta)(b+\delta') = ab + a\delta' + b\delta + \delta\delta'$$



Digitized by Google

und

$$Lim\,[\varphi(x)\,\psi(x)] = Lim\,(ab + a\delta' + b\delta + \delta\delta') = ab$$

oder vermöge der Werthe von $a$ und $b$

$$Lim\,[\varphi(x)\,\psi(x)] = Lim\,\varphi(x)\;.\;Lim\,\psi(x), \qquad (9)$$

d. h. um den Gränzwerth eines Produktes zu finden, multiplizirt man die Gränzwerthe der einzelnen Faktoren. Hätte man also z. B. für wachsende $x$

$$Lim\,\frac{x^2\,sin\,\frac{1}{x}}{x+1}$$

zu bestimmen, so ist wegen

$$\frac{x^2\,sin\,\frac{1}{x}}{x+1} = \frac{x}{x+1}\cdot\frac{sin\,\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$$

$$Lim\,\frac{x^2\,sin\,\frac{1}{x}}{x+1} = Lim\,\frac{x}{x+1}\;\;Lim\,\frac{sin\,\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$$

bei wachsenden $x$ nimmt hier $\frac{1}{x}$ immer ab, wir haben also nach (5) und (1)

$$Lim\,\frac{x^2\,sin\,\frac{1}{x}}{x+1} = 1\;.\;1 = 1.$$

Aus (9) folgt auch für $\psi(x) = F(x)\,f(x)$

$$Lim\,[F(x)\,f(x)\,\varphi(x)] = Lim\,F(x)\;.\;Lim\,f(x)\;.\;Lim\,\varphi(x) \qquad (10)$$

und so fort für mehr Faktoren. Sind also $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)\ldots\varphi_m(x)$ ihrer Natur nach verschiedene Funktionen, so ist

$$\left.\begin{array}{l} Lim\,[\varphi_1(x)\,\varphi_2(x)\,\varphi_3(x)\ldots\varphi_m(x)] \\ = Lim\,\varphi_1(x)\;.\;Lim\,\varphi_2(x)\;.\;Lim\,\varphi_3(x)\ldots Lim\,\varphi_m(x) \end{array}\right\} \qquad (11)$$

Etwas Ähnliches haben wir für die Division. Ist nämlich $Lim\,\varphi(x) = a$, so folgt wieder $\varphi(x) = a + \delta$ und

$$\frac{1}{\varphi(x)} = \frac{1}{a+\delta} = \frac{1}{a} - \frac{\delta}{(a+\delta)\,a}$$

folglich

$$Lim\left[\frac{1}{\varphi(n)}\right] = Lim\left[\frac{1}{a} - \frac{\delta}{(a+\delta)\,a}\right] = \frac{1}{a}$$

Digitized by Google

oder

$$Lim\left[\frac{1}{\varphi(x)}\right] = \frac{1}{Lim\ \varphi(x)}. \qquad (12)$$

Nun hat man nach dem Vorigen

$$Lim\left[\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}\right] = Lim\left[\psi(x) \cdot \frac{1}{\varphi(x)}\right]$$

$$= Lim\ \psi(x) \cdot Lim\left[\frac{1}{\varphi(x)}\right] = Lim\ \psi(x) \cdot \frac{1}{Lim\ \varphi(x)}$$

oder

$$Lim\left[\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}\right] = \frac{Lim\ \psi(x)}{Lim\ \varphi(x)}. \qquad (13)$$

d. h. der Gränzwerth eines Quotienten ist der Quotient der einzelnen Gränzwerthe.

Aus (11) folgt, wenn die einzelnen Funktionen ihrer Natur nach nicht von einander verschieden sind, d. h. für $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \varphi_m = \varphi$,

$$Lim\left[\overline{\varphi(x)}^m\right] = \left[Lim\ \varphi(x)\right]^m. \qquad (14)$$

Diese Gleichung läfst sich noch verallgemeinern. Setzt man nämlich

$$\varphi(x) = \overline{\psi(x)}^{\frac{p}{q}},\ m = q,$$

wo $p$ und $q$ ganze positive Zahlen bedeuten, so folgt

$$Lim\left[\overline{\psi(x)}^p\right] = \left[Lim\ \overline{\psi(x)}^{\frac{p}{q}}\right]^q$$

oder weil hier $p$ eine ganze positive Zahl ist, nach (14), wenn dort $\psi$ und $q$ für $\varphi$ und $m$ gesetzt wird

$$\left[Lim\ \psi(x)\right]^p = \left[Lim\ \overline{\psi(x)}^{\frac{p}{q}}\right]^q$$

daraus folgt

$$\sqrt[q]{\left[Lim\ \psi(x)\right]^p} = Lim\left[\overline{\psi(x)}^{\frac{p}{q}}\right]$$

oder

$$Lim\left[\overline{\psi(x)}^{\frac{p}{q}}\right] = \left[Lim\ \psi(x)\right]^{\frac{p}{q}}. \qquad (15)$$

Die Gleichung (14) gilt also auch allgemeiner für jeden gebrochenen Exponenten. Da nun $\frac{p}{q}$ jede beliebige positive Gröfse vorstellen kann, so ist für jedes positive $\mu$

$$Lim\left[\overline{\varphi(x)}^{\mu}\right] = \left[Lim\ \varphi(x)\right]^{\mu}. \qquad (16)$$

Ferner hat man

Digitized by Google

$$\frac{1}{Lim\left[\overline{\varphi(x)}^{\mu}\right]} = \frac{1}{\left[Lim\ \varphi(x)\right]^{\mu}} = \left[Lim\ \varphi(x)\right]^{-\mu}$$

Andererseits ist aber nach (12), wenn man $\overline{\varphi(x)}^{\mu}$ für $\varphi(x)$ setzt

$$Lim\left[\frac{1}{\overline{\varphi(x)}^{\mu}}\right] = \frac{1}{Lim\left[\overline{\varphi(x)}^{\mu}\right]}$$

Vergleicht man diefs mit dem Vorigen, so ist

$$Lim\left[\frac{1}{\overline{\varphi(x)}^{\mu}}\right] = \left[Lim\ \varphi(x)\right]^{-\mu}$$

oder

$$Lim\left[\overline{\varphi(x)}^{-\mu}\right] = \left[Lim\ \varphi(x)\right]^{-\mu}.$$

Man kann also sagen: für jedes positive oder negative $\mu$ ist

$$Lim\left[\overline{\varphi(x)}^{\mu}\right] = \left[Lim\ \varphi(x)\right]^{\mu} \qquad (17)$$

d. h. der Gränzwerth einer Potenz ist die Potenz des Gränzwerthes.

Hieraus folgt z. B.

$$Lim\left[\left(\frac{sin\ \delta}{\delta}\right)^{\mu}\right] = \left[Lim\ \frac{sin\ \delta}{\delta}\right]^{\mu} = 1^{\mu} = 1. \qquad (18)$$

Endlich haben wir noch folgenden Satz

$$Lim\left[A^{\varphi(x)}\right] = A^{Lim\,\varphi(x)}. \qquad (19)$$

Denn für $Lim\ \varphi(x) = a$ ist $\varphi(x) = a + \delta$, mithin

$$A^{\varphi(x)} = A^{a+\delta} = A^{a} \cdot A^{\delta}$$

und

$$Lim\left[A^{\varphi(x)}\right] = A^{a} \cdot Lim\left(A^{\delta}\right)$$

für abnehmende $\delta$ ist aber $Lim\left(A^{\delta}\right) = A^{0} = 1$, mithin

$$Lim\left[A^{\varphi(x)}\right] = A^{a}.$$

Setzt man hier für $a$ seinen Werth $Lim\ \varphi(x)$, so erhält man das Theorem in (19). Eine Anwendung desselben ist z. B.

$$Lim\left[\frac{\omega}{A^{a+\omega}}\right] = A^{Lim\,\frac{\omega}{a+\omega}}$$

folglich nach (5)

$$Lim\left[\frac{\omega}{A^{a+\omega}}\right] = A^{1} = A.$$

Die hier vorgetragenen Sätze reichen meistentheils zur Bestimmung der Gränzwerthe zusammengesetzterer Ausdrücke hin. Für ein Paar au-

Digitized by Google

ſserordentliche Fälle, in welchen ihre Anwendung zu keinem Resultate führt, dienen die Betrachtungen des achten Paragraphen.

## §. 7.

### Stetigkeit und Unstetigkeit der Funktionen.

Eine der ersten Anwendungen der Lehre von den Gränzen ist die Aufsuchung der Kennzeichen für die Continuität oder Discontinuität einer Funktion. Was dieſs bedeuten solle, wird sogleich aus den folgenden Betrachtungen erhellen. Jede Funktion giebt, wenn sie nicht eine Constante ist, immer andere und andere Werthe, sobald man die in ihr enthaltene Veränderliche beständig ändert. Die Aufeinanderfolge dieser Werthe kann nun aber entweder eine ununterbrochene oder eine sprungweise sein, und hiernach unterscheiden sich die Funktionen in stetige (continuirliche) und unstetige (discontinuirliche). Man kann dieſs auch schärfer so ausdrücken: wenn eine Funktion für $x = a$ den Werth $A$ und dann für ein anderes $x = b$ den Werth $B$ annimmt, so heiſst sie stetig, wenn der Übergang von $A$ zu $B$ so geschehen ist, daſs die Funktion vorher alle Zwischenstufen, d. h. alle Werthe durchlaufen hat, welche zwischen $A$ und $B$ eingeschaltet werden können, unstetig dagegen wird sie genannt, wenn der Übergang von $A$ nach $B$ in einem Sprunge ohne Durchlaufung der Zwischenstufen geschehen ist.

Man kann diesen Unterschied durch folgende dem gewöhnlichen Leben entnommene Beispiele sehr scharf hervorheben. Ertheilt Jemand in einer Kunst Unterricht, die Stunde zu 1 Thaler, so hat er am Ende einer solchen Unterrichtsstunde sein Vermögen vermehrt, aber nach einem stetigen Durchgange durch alle Zwischenstufen; denn in der halben Stunde hatte er $\frac{1}{2}$ Thlr., in $\frac{3}{4}$ Stunden $\frac{3}{4}$ Thlr., in $\frac{7}{8}$ Stunden $\frac{7}{8}$ Thlr. u. s. f. verdient, sein Verdienst hatte folglich ebenso stetig zugenommen als die Zeit. Denkt man sich hier den Verdienst als Funktion der Zeit, so hat man eine stetige Funktion, welche man auch leicht construiren kann, wenn man die Zeit auf einer geraden Linie $OX$ (Fig. 12) ausdehnt und das entsprechende Vermögen darauf senkrecht zeichnet. Hier wäre $A$ der Anfangspunkt einer Unterrichtsstunde, $AM$ der Stand des Vermögens in diesem Augenblicke, $B$ der Endpunkt der Unterrichtsstunde und $BN$ der entsprechende Stand des Vermögens. Um aber von $M$ nach $N$ zu kommen, muſs man alle möglichen Punkte durchlaufen, welche zwischen $M$

Digitized by Google

und $N$ liegen, oder deren Entfernungen von $OX$ gröfser als $AM$ und kleiner als $BN$ sind.

Wenn dagegen Jemand in der Lotterie 100 Thlr. gewinnt, so wird er plötzlich um soviel reicher, ohne alle Zwischenstufen nach und nach durchlaufen zu haben. Bezeichnet in Fig. 13 $A$ den Augenblick, in welchem der Gewinnst gezogen wurde und $AM$ den letzten Vermögensstand des Gewinnenden, so steigt jetzt plötzlich das Vermögen auf $AN$; der Punkt $A$ bildet also einen Moment, welcher den bisherigen Kassenbestand von dem nunmehrigen scharf trennt. Sehen wir hier die Geldereinnahme als Funktion der Zeit an, so haben wir es mit einer unstetigen Funktion zu thun, welche sich an der Stelle $A$ sprungweis ändert, indem sie hier bei $M$ abbricht und gleich darauf bei $N$ ihren Weg fortsetzt.

Es würde sich nun fragen, wie man ein analytisches Kennzeichen der Continuität oder Discontinuität einer Funktion entdecken könne. Diese Frage läfst sich leicht durch eine vergleichende Untersuchung der beiden gefundenen krummen Linien beantworten.

Wenn sich eine Funktion an der Stelle $A$ (Fig. 14) stetig ändert, so kann man sich der hier stehenden Normale $AM$ auf doppelte Weise nähern, entweder dadurch, dafs man eine der früheren Normalen, etwa $HP$, sich vorwärts bewegen, oder eine der späteren Normalen, wie $KQ$, sich rückwärts bewegen läfst. Nehmen wir an, dafs $y = f(x)$ diejenige Gleichung sei, aus deren Construktion die obige Curve entstanden ist, setzen $OA = \alpha$, $AH = AK = \delta$, so ist

$$AM = f(\alpha), \quad HP = f(\alpha - \delta), \quad KQ = f(\alpha + \delta).$$

Ziehen wir $PR \parallel OX$, so ist $QR$ der Unterschied zwischen $HP$ und $KQ$, welcher positiv oder negativ sein wird, je nachdem $HP$ gröfser oder kleiner als $KQ$ ist. Wir haben also, abgesehen von dem Vorzeichen:

$$QR = f(\alpha - \delta) - f(\alpha + \delta).$$

Lassen wir jetzt die Gröfse $\delta$ immer kleiner werden, d. h. rücken wir die Normalen $HP$ und $KQ$ von beiden Seiten her immer näher an die mittlere Normale $AM$, so wird offenbar der Unterschied $QR$ immer kleiner und zuletzt Null, sobald die Punkte $P$ und $Q$ in den einzigen Punkt $M$ zusammengefallen sind. Wir haben also für abnehmende $\delta$

$$Lim\,[f(\alpha - \delta) - f(\alpha + \delta)] = 0.$$

Anders verhält sich die Sache, wenn die Funktion $f(x)$ an der Stelle $\alpha$ unstetig wird. Sei diefs in Fig. 15 für $OA = \alpha$ der Fall, so gehören zu $OA$ zwei verschiedene Normalen $AM$ und $AN$, von denen die erste

Digitized by Google

den Endwerth aller bisherigen Werthe, die zweite den Anfangswerth einer neuen Reihe von Werthen bildet. Nehmen wir wieder $AH = AK = \delta$, so ist auch $HP = f(\alpha - \delta)$, $KQ = f(\alpha + \delta)$. Lassen wir aber $\delta$ immer kleiner werden, so rückt der Punkt $P$ immer näher an den Endpunkt $P$, oder die Normale $HP$ immer näher an die Endnormale $AM$; ebenso nähert sich von der anderen Seite her die Normale $KQ$ mehr und mehr der Anfangsnormale $AN$ und die Differenz $QR$ zwischen $HP$ und $KQ$ nähert sich fortwährend der von Null verschiedenen Gröfse $MN$. Wir haben also, wenn statt $HP$ und $KQ$ ihre Werthe gesetzt werden,

$$Lim\,[f(\alpha - \delta) - f(\alpha + \delta)] = MN.$$

Vergleichen wir diefs mit dem oben erhaltenen Resultate, so können wir sagen: Wenn eine Funktion $f(x)$ in der Nachbarschaft eines speziellen Werthes $x = \alpha$ stetig ist, so nähert sich die Differenz

$$f(\alpha - \delta) - f(\alpha + \delta)$$

für abnehmende $\delta$ fortwährend der Null; ändert sie sich dagegen an der Stelle $x = \alpha$ sprungweis, d. h. tritt hier eine Unterbrechung der Stetigkeit ein, so nähert sich jene Differenz einer von Null verschiedenen Gröfse.

Aus dieser Betrachtung fliefst unmittelbar folgende Regel:

Um eine gegebene Funktion $f(x)$ auf ihre Continuität oder Discontinuität zu untersuchen, ziehe man die Differenz

$$f(x - \delta) - f(x + \delta)$$

in Rechnung. Nähert sich bei abnehmenden $\delta$ für jedes beliebige $x$ diese Differenz unbegränzt der Null, so ist die Funktion eine durchaus stetige; kann man dagegen einen oder mehrere spezielle Werthe von $x$ finden, für welche jene Differenz sich nicht der Null nähert, so ist die Funktion eine unstetige und zwar findet für jeden solchen speziellen Werth von $x$ eine Unterbrechung der Stetigkeit statt.

Den Mechanismus der Rechnung selbst wird man leicht aus den folgenden Beispielen ersehen.

1) Es sei $f(x) = x^2$. Man hat hier

$$f(x - \delta) - f(x + \delta) = -4x\delta.$$

Wie grofs nun auch $x$ sein möge, so ist es doch in jedem bestimmten Falle $x = \alpha$ möglich, das Produkt $4\alpha\delta$ der Null so nahe zu bringen, als man will. Man setze nur $\delta = \frac{1}{n}$, wo $n$ eine Zahl $> 4\alpha$ bedeutet, so ist $4\alpha\delta$ schon ein ächter Bruch; läfst man nun $n$ fortwährend wachsen, so

Digitized by Google

wird dieser ächte Bruch immer kleiner, nähert sich also beständig der Null. Da dieſs von jedem Werthe $x = \alpha$ gilt, so folgt, daſs die Funktion $x^2$ eine durchaus stetige ist.

2) Es sei $f(x) = \frac{1}{x}$. Es wird hier

$$f(x-\delta) - f(x+\delta) = \frac{1}{x-\delta} - \frac{1}{x+\delta} = \frac{2\delta}{x^2-\delta^2}$$

Lassen wir hier $\delta$ immer kleiner werden, so nähert sich der Nenner der Gränze $x^2$, der Zähler der Gränze 0, folglich der ganze Ausdruck der Gränze Null. Doch ist das nur im Allgemeinen wahr und es ist dagegen leicht, einen speziellen Fall zu entdecken, welcher eine Ausnahme macht. Das beständige Abnehmen des ganzen Ausdrucks rührt offenbar blos von dem im Zähler vorkommenden Faktor $\delta$ her; da nun auch $\delta$ im Nenner vorkommt, so wäre es wohl möglich, daſs man unter besonderen Umständen das $\delta$ des Zählers gegen ein $\delta$ des Nenners heben könnte; hierdurch fiele im Zähler gerade derjenige Faktor weg, welcher die beständige Verminderung des ganzen Ausdrucks herbeiführt und es würde also dann für abnehmende $\delta$ jener Quotient sich nicht mehr der Null nähern. Will man aber $\delta$ im Zähler gegen ein $\delta$ im Nenner heben, so kann dieſs nur auf eine einzige Weise bewerkstelligt werden, nämlich dadurch, daſs man $x = 0$ nimmt. Für diesen Fall wird

$$Lim\,[f(x-\delta) - f(x+\delta)] = Lim\,\frac{2}{-\delta} = -\infty.$$

In der Funktion $\frac{1}{x}$ tritt also an der Stelle $x = 0$ eine Unstetigkeit ein und dieſs ist zugleich die einzige, welche in der ganzen Funktion vorkommt. Man erkennt dieſs auch leicht aus der geometrischen Construktion der Gleichung $y = \frac{1}{x}$ in Fig. 16. Geht man nämlich von $x = +1$ an rückwärts bis $x = 0$, so wächst $\frac{1}{x}$ ins Unendliche; die Normalen sind also desto gröfser, je näher sie an dem Anfangspunkte $O$ liegen, und sämmtlich positiv. Geht man dagegen von $x = -1$ an vorwärts bis $x = 0$, so werden wohl auch die Normalen an und für sich immer gröfser, sie sind aber sämmtlich negativ, d. h. sie liegen auf der entgegengesetzten Seite von $XX'$. Die ins Unendliche verlängerte Gerade $YY'$ gehört also sowohl der unteren als oberen Hälfte der Figur an, indem das unendlich verlängerte

Digitized by Google

$OY'$ die Finalnormale der bisherigen Normalen und die unendlich verlängerte $OY$ zugleich die Initialnormale aller nun kommenden darstellt. Man könnte dieſs kurz, wiewohl nicht ganz streng, so ausdrücken: an der Stelle $x = 0$ springt die Curve aus dem positiv Unendlichen plötzlich in das negativ Unendliche über, ist also hier unstetig, weil jede plötzliche Veränderung eine unstetige ist.

Ebenso leicht würde man auch finden, dafs die Funktionen $\frac{1}{1-x}$, $\frac{1}{a-x}$, $\frac{1}{a-bx}$ an den entsprechenden Stellen $x = 1$, $x = a$, $x = \frac{a}{b}$ unstetig werden.

3) Es sei $f(x) = tan\, x$. Man findet hier

$$f(x-\delta) - f(x+\delta) = \frac{sin\,(x-\delta)}{cos\,(x-\delta)} - \frac{sin\,(x+\delta)}{cos\,(x+\delta)}$$

und dieſs läfst sich durch Reduktion auf den gemeinschaftlichen Nenner und Anwendung der Formel

$$sin\, a\ cos\, b - cos\, a\ sin\, b = sin\,(a-b)$$

auf die folgenden Ausdrücke bringen

$$\frac{-\ sin\ 2\delta}{cos\,(x-\delta)\ cos\,(x+\delta)} = \frac{-\ 2\ cos\ \delta\ sin\ \delta}{\frac{1}{2}\ .\ 2\ cos\,(x-\delta)\ cos\,(x+\delta)}$$

die sich mittelst der Formeln

$$2\ cos\, a\ cos\, b = cos\,(a+b) + cos\,(a-b)$$

und

$$cos\ 2a = 1 - 2\ sin^2 a$$

in die folgenden verwandeln:

$$\frac{-\ 4\ cos\ \delta\ sin\ \delta}{cos\ 2x + cos\ 2\delta} = \frac{-\ 4\ cos\ \delta\ sin\ \delta}{cos\ 2x + 1 - 2\ sin^2\delta}$$

so dafs also

$$f(x-\delta) - f(x+\delta) = \frac{-\ 4\ cos\ \delta\ sin\ \delta}{cos\ 2x + 1 - 2\ sin^2\delta}$$

ist. Diese Differenz nähert sich im Allgemeinen immer der Null, sobald $\delta$ beständig abnimmt. Die fortwährende Verminderung des ganzen Ausdrucks liegt aber einzig und allein an dem im Zähler vorkommenden Faktor $sin\ \delta$. Könnte man diesen aus dem Zähler wegschaffen, was nicht anders, als durch Hebung gegen ein $sin\ \delta$ im Nenner möglich ist, so würde dann der Ausdruck sich nicht mehr der Null nähern und folglich in den Fällen, wo jene Hebung möglich wäre, eine Unstetigkeit der Funktion

Digitized by Google

$f(x) = tan\, x$ eintreten. Soll sich aber $sin\, \delta$ im Zähler gegen $sin^2\, \delta$ heben, so mufs

$$cos\, 2x + 1 = 0 \text{ oder } cos\, 2x = -1$$

sein. Um diese Gleichung nach $x$ aufzulösen, brauchen wir nur alle Bogen aufzusuchen, deren Cosinus $= -1$ sind. Diese Bogen sind der Reihe nach

$$\pi,\quad 3\pi,\quad 5\pi,\quad 7\pi,\ \ldots$$
$$-\pi,\ -3\pi,\ -5\pi,\ -7\pi,\ \ldots$$

Setzen wir diese Werthe für $2x$, so haben wir alle Auflösungen der Gleichung $cos\, 2x = -1$; es folgt daraus

$$x = \left\{ \begin{matrix} \frac{\pi}{2}, & \frac{3\pi}{2}, & \frac{5\pi}{2}, & \ldots \\ -\frac{\pi}{2}, & -\frac{3\pi}{2}, & -\frac{5\pi}{2}, & \ldots \end{matrix} \right\}$$

In allen diesen Fällen ist

$$f(x-\delta) - f(x+\delta) = \frac{-4\, cos\, \delta\, sin\, \delta}{-2\, sin^2\, \delta} = \frac{2\, cos\, \delta}{sin\, \delta}$$

folglich

$$Lim\, [f(x-\delta) - f(x+\delta)] = \infty.$$

Mithin ist die Funktion $tan\, x$ für alle jene Werthe von $x$ unstetig.

Dieses Resultat der analytischen Untersuchung wird von der Geometrie vollkommen bestätigt. Die Curve in Fig. 17, welche die Gleichung $y = tan\, x$ repräsentirt, fängt in dem Punkte $O$ selbst an, weil $tan\, 0 = 0$ ist. Von hier aus entfernt sie sich immer mehr von der Geraden $OX$, weil $tan\, x$ wächst, wenn $x$ zunimmt; diese Zunahme geht bis zur Stelle $x = \frac{\pi}{2}$ ins Unendliche fort. Darüber hinaus aber wird die Tangente negativ und nimmt rückwärts die nämlichen Werthe auf der negativen Seite an, die sie früher auf der positiven Seite hatte, weil überhaupt $tan\left(\frac{\pi}{2}+u\right) = -\,tan\left(\frac{\pi}{2}-u\right)$ ist. Es ist also auch $Lim\, tan\left(\frac{\pi}{2}+\delta\right) = -\,Lim\, tan\left(\frac{\pi}{2}-\delta\right) = -\infty$, so dafs also die krumme Linie an der Stelle $x = \frac{\pi}{2}$ aus dem positiv Unendlichen in das negativ Unendliche überspringt, also sich hier unstetig ändert. Für $x = \pi$ ist wieder $tan\, x = 0$

Digitized by Google

und von hier an bis $x = 2\pi$ wiederholt sich das Spiel, welches früher von $x = 0$ bis $x = \pi$ erschienen war; die Curve ändert sich nämlich an der Stelle $x = \frac{3\pi}{2}$ wieder unstetig und ebenso weiter für $x = \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}$ u. s. f. Die nämlichen Erscheinungen beobachtet man auch, wenn man von $O$ aus rückwärts geht, d. h. die krumme Linie für negative $x$ verfolgt. Das Bild der Funktion $tan\, x$ besteht also aus einer unendlichen Menge von einander abgesonderter Züge, durch welche in so fern eine Unstetigkeit herbeigeführt wird, als man von dem einen nicht auf den anderen kommen kann, ohne einen Sprung aus dem Negativen ins Positive zu machen.

Als andere Beispiele unstetiger Funktionen kommen noch $cot\, x$, $sec\, x$ und $cosec\, x$ unter den einfacheren vor, welche in der niederen Analysis betrachtet werden. Durch ein dem vorigen ganz analoges Verfahren wird man leicht die Werthe von $x$ entdecken können, für welche in diesen Funktionen eine Unterbrechung der Stetigkeit eintritt*).

Die hier betrachteten Funktionen haben das Eigene, dafs in ihnen die Unterbrechung der Continuität durch einen Sprung aus dem negativ Unendlichen in das positiv Unendliche geschieht, weil sie gebrochene Funktionen sind, deren Nenner aus dem Negativen ins Positive durch die Null hindurchgehen. Wir wollen dagegen noch einige Funktionen betrachten, die aus einer negativen endlichen Gröfse in eine positive überspringen.

4) Es sei $f(x) = Arctan\, \frac{1}{x}$. Da wir schon wissen, dafs $\frac{1}{x}$ an der Stelle 0 sich unstetig ändert, so mufs dieſs auch bei $Arctan\, \frac{1}{x}$ der Fall sein. In der That haben wir

---

*) Manche haben Funktionen wie $\frac{1}{x}$, $tan\, x$ gar nicht für unstetige gelten lassen wollen, obgleich sie den in §. 7. aufgestellten Begriff der Unstetigkeit zugeben. Dieſs ist eine der wunderlichsten Begriffsverwirrungen. Wenn jemand 1000 Thlr. Schulden, aber kein Vermögen hat und 2000 Thlr. in der Lotterie gewinnt, so ändert sich sein Kassenbestand unstetig, und springt aus $-1000$ nach $+1000$ über. Ebenso unstetig wird er sich auch ändern, wenn man für die Zahlen 1000 und 2000 setzt 10000 und 20000 oder 100000 und 200000 u. s. f. Geht man so fort, so kommt man immer näher und näher an Sprünge der obigen Art; also ist auch eine Funktion, die von $-\infty$ nach $+\infty$ überspringt, eine unstetige.

Digitized by Google

$$Lim\ Arctan\ \frac{1}{-\delta} = -\ Lim\ Arctan\ \frac{1}{\delta} = -\ Arctan\ \infty = -\frac{\pi}{2}$$

$$Lim\ Arctan\ \frac{1}{+\delta} = +\ Lim\ Arctan\ \frac{1}{\delta} = +\ Arctan\ \infty = +\frac{\pi}{2}.$$

Wenn also $x$ von $-\delta$ nach $+\delta$ übergeht, so springt die Funktion $Arctan\frac{1}{x}$ von $-\frac{\pi}{2}$ nach $+\frac{\pi}{2}$ über. Construirt man die krumme Linie, welche das Bild der genannten Funktion darstellt, so erhält man Fig. 18. Wollte man die Unstetigkeit nach der gegebenen Regel beurtheilen, so hätte man

$$Arctan\ \frac{1}{\alpha-\delta} - Arctan\ \frac{1}{\alpha+\delta} = Arctan\ \frac{\frac{1}{\alpha-\delta} - \frac{1}{\alpha+\delta}}{1 + \frac{1}{(\alpha-\delta)(\alpha+\delta)}}$$

$$= Arctan\ \frac{2\delta}{\alpha^2 - \delta^2 + 1}$$

zu untersuchen. Hieraus scheint sich auf den ersten Blick zu ergeben, dafs die Funktion $Arctan\frac{1}{x}$ an der Stelle $\alpha = 0$ stetig sei, weil

$$Lim\ Arctan\ \frac{2\delta}{-\delta^2+1} = 0$$

ist. Man mufs aber berücksichtigen, dafs hier die Formel (9) in §. 2 angewendet worden ist, welche nur dann gilt, wenn $x$ und $y$ positiv sind. Für $\alpha = 0$ aber hat man $x = -\frac{1}{\delta}$, $y = +\frac{1}{\delta}$, dann ist die Formel (9) nicht mehr anwendbar und man hat unmittelbar

$$Lim\left[Arctan\ -\frac{1}{\delta} - Arctan\ \frac{1}{+\delta}\right] = -\ Lim\left(-2\ Arctan\ \frac{1}{\delta}\right) = -\pi$$

wie dieſs in der That auch sein mufs.

5) Da die Funktion $tan\ x$ an allen den Stellen

$$\pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \pm\frac{5\pi}{2}, \ldots$$

unstetig wird, so mufs dieſs auch mit der Funktion $Arctan\ (tan\ x)$ der Fall sein. Diese springt an allen jenen Stellen von $\pm\frac{\pi}{2}$ nach $\mp\frac{\pi}{2}$ über. So ist z. B.

Digitized by Google

$$Lim\left[Arctan\left(tan\left(\frac{\pi}{2}-\delta\right)\right)-Arctan\left(tan\left(\frac{\pi}{2}+\delta\right)\right)\right]$$
$$= Lim\left[Arctan\left(cot\,\delta\right)+Arctan\left(cot\,\delta\right)\right]$$
$$= 2\,Arctan\,\infty = \pi$$

und ebenso an allen übrigen Stellen.

## §. 8.

### Reduktion einiger Gränzbestimmungen auf andere.

Es ist nicht immer möglich, unmittelbar die Gränze zu bestimmen, welcher sich eine gegebene Funktion für wachsende oder abnehmende Werthe ihrer Veränderlichen nähert und man mufs sich daher in solchen Fällen bemühen, die Aufgabe dadurch zu lösen, dafs man sie auf eine andere schon bekannte, oder wenigstens leichtere zurückführt. Zu diesem Zwecke hat Cauchy zwei sehr fruchtbare Sätze angegeben, welche hier folgen mögen.

I. Wenn sich die Differenz

$$f(x+1)-f(x)$$

für wachsende $x$ einer angebbaren Gränze nähert, so ist diese immer identisch mit derjenigen, welcher sich der Quotient

$$\frac{f(x)}{x}$$

bei ebenfalls wachsenden $x$ nähert.

Nehmen wir zuerst an, dafs der Gränzwerth jener Differenz eine endliche Gröfse $k$, also

$$Lim\left[f(x+1)-f(x)\right]=k$$

sei, so wird die Differenz

$$f(a+1)-f(a)$$

worin $a$ eine beliebige, aber vor der Hand als constant gedachte Gröfse bedeutet, um eine endliche Gröfse $\delta$ von jener Gränze verschieden sein, so dafs man setzen kann:

$$f(a+1)-f(a)=k+\delta$$

wobei $\delta$ eine Gröfse ist, die beständig abnimmt, wenn $a$ wächst. Schreiben wir $a+1$ für $a$, so setzen wir gröfsere Werthe, also wird $\delta$ kleiner werden und in eine andere Gröfse $\delta_1 < \delta$ übergehen, so dafs jetzt ist:

$$f(a+2)-f(a+1)=k+\delta_1.$$

Ebenso können wir weiter schreiben:

Digitized by Google

$$f(a+3)-f(a+2)=k+\delta_2$$

worin $\delta_2<\delta_1$ ist. Gehen wir auf diese Weise immer fort bis zu einer letzten Zahl $n$, so wären die letzten Gleichungen dieser Form:

$$f(a+n-1)-f(a+n-2)=k+\delta_{n-2}$$
$$f(a+n)-f(a+n-1)=k+\delta_{n-1}$$

Addiren wir alle gefundenen Gleichungen, deren Anzahl $n$ beträgt, so heben sich alle Glieder bis auf zwei; es kommt nämlich

$$f(a+n)-f(a)=nk+\delta+\delta_1+\delta_2+\cdots+\delta_{n-1}.$$

Da aber die Gröfsen $\delta$, $\delta_1$, $\delta_2$, $\ldots$ $\delta_{n-1}$ ihren absoluten Werthen nach eine abnehmende Reihe bilden, und ihrer $n$ vorhanden sind, so ist die Summe derselben offenbar kleiner als die gröfste von ihnen $n$mal genommen und gröfser als das $n$fache der kleinsten unter ihnen, d. h. es ist

$$n\delta>\delta+\delta_1+\delta_2+\cdots+\delta_{n-1}>n\delta_{n-1}$$

Hieraus erhält man durch Addition von $nk$ unter Anwendung der obigen Gleichung

$$nk+n\delta>f(a+n)-f(a)>nk+n\delta_{n-1}$$

oder

$$nk+n\delta+f(a)>f(a+n)>nk+n\delta_{n-1}+f(a)$$

und durch Division mit $a+n$

$$\frac{n(k+\delta)}{a+n}+\frac{f(a)}{a+n}>\frac{f(a+n)}{a+n}>\frac{n(k+\delta_{n-1})}{a+n}+\frac{f(a)}{a+n}$$

Lassen wir hier $n$ ins Unendliche wachsen, während $a$ unverändert seinen Werth behält, so ist auf der linken Seite nach §. 6,

$$Lim\,\frac{n}{a+n}=1,\quad Lim\,\frac{f(a)}{a+n}=0$$

und das Nämliche gilt auch für die rechte Seite der Gleichung, in welcher aufserdem noch $Lim\,\delta_{n-1}=0$ ist. Diefs letztere erkennt man leicht, wenn man die im Anfange gemachte Voraussetzung

$$Lim\,[f(x+1)-f(x)]=k$$

mit der früheren Gleichung

$$f(a+n)-f(a+n-1)=k+\delta_{n-1}$$

zusammenhält und $n$ beständig wachsen läfst. Substituirt man nun die gefundenen Gränzwerthe, so ergiebt sich

$$k+\delta>Lim\,\frac{f(a+n)}{a+n}>k$$

d. h. in Worten: wenn $k$ die Gränze bedeutet, welcher sich die Differenz für wachsende $f(x+1)-f(x)$ für wachsende $x$ nähert und wenn für eine

Digitized by Google

beliebig gewählte Zahl $a$ die Differenz $f(a+1)-f(a)$ um $\delta$ von $k$ verschieden ist, so liegt die Gränze, welcher sich der Quotient

$$\frac{f(a+n)}{a+n}$$

bei constantem $a$ und wachsenden $n$ nähert, zwischen den Werthen $k$ und $k+\delta$.

Man kann aber $a$ beliebig wählen; folglich darf man es auch immer gröfser nehmen, wodurch $\delta$ immer kleiner wird; lassen wir $a$ ins Unendliche wachsen und gehen zur Gränze über, so lautet der Satz: ist

$$Lim\,[f(a+1)-f(a)] = Lim\,(k+\delta) = k$$

so ist auch, wenn $a$ und $n$ gleichzeitig wachsen,

$$Lim\,(k+\delta) > Lim\frac{f(a+n)}{a+n} > k$$

d. h. die Gränzwerthe $k+\delta$ und $k$, zwischen denen der Quotient liegt, rücken immer näher zusammen und werden zuletzt identisch; da nun der Quotient immer zwischen ihnen bleiben soll, so mufs dann sein

$$Lim\frac{f(a+n)}{a+n} = k$$

also

$$Lim\frac{f(a+n)}{a+n} = Lim\,[f(a+1)-f(a)].$$

Da hier aber $a$ und $n$ mit einander und ebenso $a+n$ ins Unendliche wächst, so kann man überhaupt sagen: für wachsende $x$ ist

$$Lim\frac{f(x)}{x} = Lim\,[f(x+1)-f(x)].$$

Die eben durchgeführte Betrachtung gilt aber nur für den Fall, dafs die Gränze $k$, welcher sich die Differenz $f(x+1)-f(x)$ nähert, eine bestimmte, angebbare Gröfse ist, mit welcher man rechnen kann. Wenn aber $f(x+1)-f(x)$ für wachsende $x$ jede gegebene Gröfse übersteigt, d. h. wenn $Lim\,[f(x+1)-f(x)]=\infty$ ist, so wird die vorige Rechnung unbrauchbar, weil das Zeichen $\infty$ nicht ein angebbares Quantum, sondern eine im Zustande fortwährender Veränderung, nämlich des unaufhörlichen Wachsthums befindliche Gröfse bezeichnet, die man nicht unmittelbar in Rechnung ziehen kann, wie jenes $k$. Für diese Fälle dient folgende Betrachtung.

Wenn die Differenz $f(x+1)-f(x)$ für wachsende $x$ beständig zunimmt, so wird sich immer eine Zahl $a$ der Art finden lassen, dafs



Digitized by Google

$f(a+1)-f(a)$ gröfser als eine gegebene Gröfse $\omega$ ist. Man hat dann offenbar aus

$$f(a+1)-f(a)>\omega$$

um so mehr $f(a+2)-f(a+1)>\omega$

und $f(a+3)-f(a+2)>\omega$

u. s. f.

$$f(a+n)-f(a+n-1)>\omega.$$

Durch Addition dieser $n$ Gleichungen ergiebt sich

$$f(a+n)-f(a)>n\omega$$

ferner

$$f(a+n)>n\omega+f(a)$$

und

$$\frac{f(a+n)}{a+n}>\frac{n\omega}{a+n}+\frac{f(a)}{a+n}.$$

Lassen wir hier $n$ ins Unendliche wachsen, so wird aus ähnlichen Gründen wie früher

$$Lim\,\frac{f(a+n)}{a+n}>\omega$$

d. h. wenn man eine Zahl $a$ hat, für welche $f(a+1)-f(a)>\omega$ ist, so ist auch für constante $a$ und wachsende $n$ der Quotient $\frac{f(a+n)}{a+n}$ gröfser als dieses $\omega$. Da man nun $\omega$ so grofs nehmen darf, als man will, so können wir auch $\omega$ ins Unendliche wachsen lassen, wozu nach der Voraussetzung weiter nichts gehört, als dafs $a$ als ins Unendliche wachsend genommen werden soll. Dann lautet der Satz: wenn $f(a+1)-f(a)$ für wachsende $a$ jede gegebene Gröfse übersteigt, so wird der Quotient

$$\frac{f(a+n)}{a+n}$$

für gleichzeitig wachsende $a$ und $n$ gröfser als jede angebbare Zahl. Statt dessen kann man auch kurz sagen: für $Lim\,[f(x+1)-f(x)]=\infty$ ist auch $Lim\,\frac{f(x)}{x}=\infty$.

Es wäre nun noch der Fall zu betrachten, in welchem $Lim\,[f(x+1)-f(x)]=-\infty$ ist. Dieser reduzirt sich leicht auf den vorhergehenden. Wenn sich nämlich

$$f(x+1)-f(x)$$

der Gränze $-\infty$ unendlich nähert, so hat offenbar

Digitized by Google

$$[-f(x+1)] - [-f(x)]$$

$+\infty$ zur Gränze. Es folgt daraus, dafs auch

$$Lim \frac{[-f(x)]}{x} = +\infty$$

mithin

$$Lim \frac{f(x)}{x} = -\infty \text{ ist.}$$

Näherte sich endlich $f(x+1) - f(x)$ gar keiner angebbaren Gränze, etwa wie die Differenz $sin\,(x+1) - sin\,x$, welche für wachsende $x$ zwischen positiven und negativen Werthen unaufhörlich hin und wieder schwankt, so wären die bisherigen Schlüsse sämmtlich unanwendbar, weil man weder ein bestimmtes $k$, wie im ersten Falle, vor sich hätte, noch sagen könnte, dafs von einer gewissen Stelle an $f(a+1) - f(a)$ gröfser als eine gegebene Zahl sei und bleibe, wie im zweiten Theile unserer Betrachtung. In diesem Falle ist der angegebene Satz nicht zu brauchen.

Fafst man das Bisherige zusammen, so ist überhaupt, blos mit Ausnahme des letzten Falles:

$$Lim \frac{f(x)}{x} = Lim\,[f(x+1) - f(x)], \text{ für wachsende } x,$$

womit das anfangs aufgestellte Theorem bewiesen ist.

Man kann demselben leicht eine geometrische Bedeutung abgewinnen. — Sei nämlich in Fig. 19 $UMNV$ eine krumme Linie, welche aus der geometrischen Construktion der Gleichung $y = f(x)$ entstanden ist, sei ferner $OA = x$, $AM = f(x)$, $AB = 1$, folglich $OB = x+1$, $BN = f(x+1)$. Nähert sich nun der Quotient $\frac{f(x)}{x}$ einer bestimmten Gränze, so nähert sich jene krumme Linie mehr und mehr einer gewissen Richtung. Denn es ist hier $\frac{f(x)}{x} = \frac{AM}{AO}$, d. h. $=$ der Tangente des Winkels $AOM$; wenn diese nun einem bestimmten Gränzwerthe zusteuert, so mufs diefs mit dem Winkel $AOM$ selbst der Fall sein; dieser Gränzwerth des Winkels sei $AOZ = \alpha$ und $\angle\ MOZ = \delta$, mithin $AOM = \alpha - \delta$, dann ist $\delta$ eine Gröfse, die bis zur Null abnimmt, wenn $x$ wächst; folglich

$$Lim \frac{f(x)}{x} = Lim\ tan\,(\alpha - \delta) = tan\,\alpha.$$



Digitized by Google

Zieht man ferner $MP \parallel AB$, so ist $NP = f(x+1) - f(x)$ und da $MP = AB = 1$ war,

$$f(x+1) - f(x) = tan\ NMP.$$

Ziehen wir noch $MQ \parallel OZ$, so ist $\angle PMQ = \angle AOZ = \alpha$ und für $NMQ = \delta'$, $\angle NMP = \alpha + \delta'$; also

$$f(x+1) - f(x) = tan\ (\alpha + \delta').$$

Je gröfser aber $x$ ist, desto mehr nähert sich die Richtung des Bogens $MN$ der Richtung $OZ$, oder, was das Nämliche ist, der Richtung $MQ$; der Winkel $NMQ = \delta'$ nimmt also für wachsende $x$ immer ab, und es ist daher auch

$$Lim\ [f(x+1) - f(x)] = Lim\ tan\ (\alpha + \delta') = tan\ \alpha$$

d. h. mit dem Obigen verglichen

$$Lim\ \frac{f(x)}{x} = Lim\ [f(x+1) - f(x)].$$

Die hier gegebene Zeichnung und Betrachtung entspricht dem Falle, in welchem $\alpha$ also auch $tan\ \alpha$ (das frühere $k$) eine endliche bestimmte Gröfse hat, sie kann aber leicht auch auf den Fall angewendet werden, in welchem $\alpha = 0$ oder $= \frac{\pi}{2}$, also $tan\ \alpha = k = 0$ oder $= \infty$ ist.

Nimmt man die krumme Linie so, dafs $f(x+1) - f(x)$ sich weder einer endlichen bestimmten Gränze nähert, noch beständig wächst, so sieht man, dafs auch geometrisch jenes Theorem dann nicht mehr gilt.

II. Wenn sich der Quotient

$$\frac{f(x+1)}{f(x)}$$

für wachsende $x$ einer angebbaren Gränze nähert, so ist diese immer identisch mit derjenigen, welcher sich die Wurzelgröfse

$$[f(x)]^{\frac{1}{x}}$$

bei ebenfalls wachsenden $x$ nähert.

Nehmen wir zuvörderst an, dafs der Gränzwerth jenes Quotienten eine endliche Gröfse $k$, also

$$Lim\ \frac{f(x+1)}{f(x)} = k$$

sei, so wird der Quotient

$$\frac{f(a+1)}{f(a)}$$

Digitized by Google

worin $a$ eine beliebige constante Gröfse bezeichnet, um eine endliche Gröfse $\delta$ von jener Gränze verschieden sein, so dafs man setzen kann

$$\frac{f(a+1)}{f(a)} = k + \delta$$

wobei $\delta$ eine Gröfse ist, welche abnehmen wird, wenn man $a$ wachsen läfst. Setzen wir für $a$ das gröfsere $a+1$, so wird $\delta$ kleiner und geht in etwas Anderes $\delta_1 < \delta$ über, so dafs jetzt ist:

$$\frac{f(a+2)}{f(a+1)} = k + \delta_1.$$

Ebenso können wir weiter setzen

$$\frac{f(a+3)}{f(a+2)} = k + \delta_2.$$

u. s. f.

$$\text{bis } \frac{f(a+n)}{f(a+n-1)} = k + \delta_{n-1}.$$

Multipliziren wir alle so gefundenen Gleichungen mit einander, so ergiebt sich sehr einfach:

$$\frac{f(a+n)}{f(a)} = (k+\delta)(k+\delta_1)(k+\delta_2)\ldots(k+\delta_{n-1}).$$

Da hier $\delta$ die gröfste der Gröfsen $\delta$, $\delta_1$, $\ldots$ $\delta_{n-1}$ und $\delta_{n-1}$ die kleinste unter ihnen ist, da ferner ihrer $n$ vorhanden sind, so hat man offenbar

$$\frac{f(a+n)}{f(a)} < (k+\delta)^n$$

$$\text{und } \frac{f(a+n)}{f(a)} > (k+\delta_{n-1})^n$$

oder, was das Nämliche ist, nur übersichtlicher gestellt,

$$(k+\delta)^n > \frac{f(a+n)}{f(a)} > (k+\delta_{n-1})^n$$

woraus folgt

$$(k+\delta)^n f(a) > f(a+n) > (k+\delta_{n-1})^n f(a)$$

und durch Erhebung auf den Exponenten $\frac{1}{a+n}$,

$$(k+\delta)^{\frac{n}{a+n}} [f(a)]^{\frac{1}{a+n}} > [f(a+n)]^{\frac{1}{a+n}} > (k+\delta_{n-1})^{\frac{n}{a+n}} [f(a)]^{\frac{1}{a+n}}.$$

Läfst man hier $n$ ins Unendliche wachsen, so ist

Digitized by Google

$$Lim \frac{n}{a+n} = 1$$

$$Lim [f(a)]^{\frac{1}{a+n}} = [f(a)]^0 = 1$$

$$Lim \delta_{n-1} = 0.$$

Man erhält folglich

$$k + \delta > Lim [f(a+n)]^{\frac{1}{a+n}} > k.$$

Diefs gilt, wie grofs man auch in der Gleichung

$$\frac{f(a+1)}{f(a)} = k + \delta$$

die constante Gröfse $a$ nehmen möge. Lassen wir dieselbe ins Unendliche wachsen, so nimmt $\delta$ ins Unendliche ab und wir haben den Satz: für

$$Lim \frac{f(a+1)}{f(a)} = k$$

ist

$$Lim (k+\delta) > Lim [f(a+n)]^{\frac{1}{a+n}} > k$$

wo $a$ und $n$ gleichzeitig wachsen. Hierbei rücken aber die Gränzen $k$ und $k+\delta$ immer näher zusammen, weil $Lim (k+\delta) = k$ ist. Es wird also für

$$Lim \frac{f(a+1)}{f(a)} = k$$

auch

$$Lim [f(a+n)]^{\frac{1}{a+n}} = k$$

oder überhaupt

$$Lim [f(x)]^{\frac{1}{x}} = Lim \frac{f(x+1)}{f(x)}, \text{ für wachsende } x.$$

Diese Schlüsse würden nicht mehr gelten, wenn der Quotient

$$\frac{f(x+1)}{f(x)}$$

für wachsende $x$ ins Unendliche zunähme, weil in diesem Falle $k = \infty$, d. h. keine bestimmte Gröfse ist, die man mit Sicherheit der Rechnung unterwerfen könnte. Wenn aber

$$Lim \frac{f(x+1)}{f(x)} = \infty$$

ist, so wird sich immer eine Gröfse $a$ angeben lassen, für welche der Quotient $\frac{f(a+1)}{f(a)}$ gröfser als eine bestimmte Zahl $\omega$, also

Digitized by Google

$$\frac{f(a+1)}{f(a)} > \omega$$

ist. Man hat dann um so mehr:

$$\frac{f(a+2)}{f(a+1)} > \omega$$
$$\frac{f(a+3)}{f(a+2)} > \omega$$
u. s. f.
$$\frac{f(a+n)}{f(a+n-1)} > \omega$$

und wenn man diese Gleichungen unter einander und noch mit der ersten multiplizirt

$$\frac{f(a+n)}{f(a)} > \omega^n$$

folglich

$$f(a+n) > \omega^n f(a)$$

und

$$[f(a+n)]^{\frac{1}{a+n}} > \omega^{\frac{n}{a+n}} [f(a)]^{\frac{1}{a+n}}$$

mithin, wenn man zur Gränze für wachsende $n$ übergeht,

$$Lim\,[f(a+n)]^{\frac{1}{a+n}} > \omega.$$

Läfst man aber $\omega$ ins Unendliche wachsen, so mufs vermöge der Voraussetzung:

$$Lim\,\frac{f(x+1)}{f(x)} = \infty$$

auch $a$ ins Unendliche wachsen; man hat dann für

$$Lim\,\frac{f(a+1)}{f(a)} = Lim\,\omega = \infty$$

um so mehr

$$Lim\,[f(a+n)]^{\frac{1}{a+n}} = \infty$$

d. h. wieder

$$Lim\,[f(x)]^{\frac{1}{x}} = Lim\,\frac{f(x+1)}{f(x)}.$$

Der Fall, dafs $Lim\,\frac{f(x+1)}{f(x)} = -\infty$ wäre, kann hier nicht vorkommen, weil bei wachsenden $x$ der Zähler und Nenner immer gleiche Zeichen haben müssen, wenn nicht der folgende Fall eintreten soll.

Digitized by Google

Näherte sich $\frac{f(x+1)}{f(x)}$ für wachsende $x$ gar keiner angebbaren Gränze, was dann z. B. der Fall wäre, wenn bald der Zähler, bald der Nenner positiv oder negativ würde, wie in dem Quotienten $\frac{\sin(x+1)}{\sin x}$, so gelten alle bisherigen Schlüsse nicht, und der Satz selbst ist dann nicht allgemein gültig.

Fassen wir das Bisherige zusammen, so ist überhaupt, blos mit Ausnahme des letzten Falles,

$$Lim\,[f(x)]^{\frac{1}{x}} = Lim\,\frac{f(x+1)}{f(x)},$$

womit der angezeigte Satz bewiesen ist.

Man könnte denselben sehr leicht auch auf folgende Weise darthun. Man setze in dem ersten Theoreme $f(x)$ gleich dem Logarithmus einer anderen Funktion $\varphi(x)$, also $f(x) = log\,\varphi(x)$, so ist desto richtiger, je gröfser $x$ ist,

$$log\,\varphi(x+1) - log\,\varphi(x) = \frac{log\,\varphi(x)}{x}$$

d. h.

$$log\,\frac{\varphi(x+1)}{\varphi(x)} = log\,[\varphi(x)]^{\frac{1}{x}}.$$

Geht man hier von den Logarithmen auf die Zahlen zurück, so folgt die Gleichung

$$\frac{\varphi(x+1)}{\varphi(x)} = [\varphi(x)]^{\frac{1}{x}}$$

welche wieder um so genauer gilt, je gröfser $x$ ist. Man hat also

$$Lim\,\frac{\varphi(x+1)}{\varphi(x)} = Lim\,[\varphi(x)]^{\frac{1}{x}}$$

und diefs ist das Nämliche wie das obige Theorem, da $\varphi$ eine ebenso beliebige Funktion bedeutet wie $f$.

Eine geometrische Bedeutung läfst sich diesem zweiten Satze nicht abgewinnen. Denn es ist

$$[f(x)]^{\frac{1}{x}} = \sqrt[x]{f(x)}$$

und da hier $x$ immer wächst, so hätte man Wurzeln immer höherer Grade zu construiren. Geometrisch lassen sich aber nur Quadrat- und Cubikwurzeln darstellen, die ersten mit Hülfe von zwei Dimensionen, die zweiten unter Anwendung dreier Dimensionen; weiter kommt man hier nicht,

Digitized by Google

weil der Raum nicht mehr als drei Dimensionen hat. Daher kann man auch jene Gleichung nicht geometrisch versinnlichen. Es ist diefs wieder ein Beispiel davon, dafs die Figuren der Arithmetik, d. h. ihre nach gewissen Schematen gebildeten Gröfsenverknüpfungen, die Figuren der Geometrie weit hinter sich zurücklassen.

## §. 9.

Anwendungen der beiden Theoreme des vorigen Paragraphen.

### I. Beispiele für das erste Theorem.

1) Sei $f(x) = log\, x$, so ist

$$Lim \frac{log\, x}{x} = Lim\, [log\, (x+1) - log\, x].$$

Nun ist aber

$$log\, (x+1) - log\, x = log \frac{x+1}{x} = log \left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

und für wachsende $x$ nähert sich $log\, (1+x)$ der Gränze $log\, (1+0) = 0$; also wird nun auch

$$Lim \frac{log\, x}{x} = 0.$$

Man sieht hieraus, dafs die Zahlen bedeutend rascher wachsen, als ihre Logarithmen, gleichviel in welchem Systeme diese genommen werden.

2) Sei $f(x) = a^x$, so wird

$$Lim \frac{a^x}{x} = Lim\, [a^{x+1} - a^x].$$

Man hat aber

$$a^{x+1} - a^x = (a-1)\, a^x.$$

Ist nun $a > 1$, so wächst $a^x$ ins Unendliche hinaus und es wird dann auch

$$Lim\, (a-1)\, a^x = \infty$$

woraus folgt

$$Lim \frac{a^x}{x} = \infty.$$

Diese Gleichung sagt, dafs die successiven Potenzen einer die Einheit übersteigenden Gröfse rascher zunehmen, als die natürlichen Zahlen.

### II. Beispiele für das zweite Theorem.

1) Für $f(x) = x$ ist:

$$Lim \frac{f(x+1)}{f(x)} = Lim \frac{x+1}{x} = Lim \left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1$$

folglich auch

Digitized by Google

$$Lim\, x^{\frac{1}{x}} = 1.$$

Der Sinn dieser Gleichung ist leicht zu finden, wenn man successive 2, 3, 4, ... für $x$ setzt und bemerkt, dafs $x^{\frac{1}{x}} = \sqrt[x]{x}$ ist. Man kann dann nämlich den Satz aussprechen: die Zahlen

$$\sqrt{2},\ \sqrt[3]{3},\ \sqrt[4]{4},\ \sqrt[5]{5},\ \sqrt[6]{6},\ \ldots.$$

nähern sich mehr und mehr der Einheit, je weiter man in dieser Reihe selbst fortgeht.

2) Für $f(x) = \frac{1}{x}$ wird

$$\frac{f(x+1)}{f(x)} = \frac{\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x}} = \frac{x}{x+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{x}}$$

$$Lim\, \frac{f(x+1)}{f(x)} = Lim\, \frac{1}{1+\frac{1}{x}} = 1$$

mithin auch

$$Lim\, \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}} = 1.$$

Diese Gleichung ist das Umgekehrte der vorigen; sie sagt, dafs auch die Gröfsen

$$\sqrt{\frac{1}{2}},\ \sqrt[3]{\frac{1}{3}},\ \sqrt[4]{\frac{1}{4}},\ \sqrt[5]{\frac{1}{5}},\ \ldots$$

sich fortwährend der Einheit nähern, je mehr man sich vom Anfange entfernt; ein Satz, den man leicht aus dem vorigen ableiten könnte.

3) Für $f(x) = log\, x$ wird

$$\frac{f(x+1)}{f(x)} = \frac{log\,(x+1)}{log\, x} = \frac{log\, x + log\,(1+\frac{1}{x})}{log\, x}$$

$$Lim\, \frac{log\,(x+1)}{log\, x} = Lim\, \left[1 + \frac{log\,(1+\frac{1}{x})}{log\, x}\right] = 1$$

mithin ist auch

$$Lim\, (log\, x)^{\frac{1}{x}} = 1.$$

Digitized by Google

4) Man würde ebenso leicht auch finden

$$Lim \left(\frac{1}{log\ x}\right)^{\frac{1}{x}} = 1.$$

5) Sei $f(x) = 1 . 2 . 3 . \ldots . x$, d. h. gleich einer Funktion, die nur für ganze positive $x$ Sinn hat. Es ist dann

$$\frac{f(x+1)}{f(x)} = \frac{1 . 2 . 3 . \ldots . (x+1)}{1 . 2 . 3 . \ldots . x} = x + 1$$

folglich

$$Lim \frac{f(x+1)}{f(x)} = \infty$$

mithin ist auch

$$Lim\ (1 . 2 . 3 . \ldots . x)^{\frac{1}{x}} = \infty.$$

Es folgt daraus, dafs die Zahlen

$$\sqrt{1 . 2},\ \sqrt[3]{1 . 2 . 3},\ \sqrt[4]{1 . 2 . 3 . 4},\ \ldots$$

ins Unendliche wachsen, d. h. dafs sich, wenn man nur weit genug geht, immer eine Zahl $n$ der Art finden läfst, dafs die Wurzel

$$\sqrt[n]{1 . 2 . 3 . \ldots . n}$$

jede gegebene noch so grofse Zahl übersteigt.

6) Für $f(x) = \frac{1}{1 . 2 . 3 . \ldots . x}$ wird

$$\frac{f(x+1)}{f(x)} = \frac{\frac{1}{1 . 2 . 3 . \ldots . (x+1)}}{\frac{1}{1 . 2 . 3 . \ldots . x}} = \frac{1 . 2 . 3 . \ldots . x}{1 . 2 . 3 . \ldots . (x+1)} = \frac{1}{x+1}$$

und

$$Lim \frac{f(x+1)}{f(x)} = Lim \frac{1}{x+1} = 0$$

mithin auch

$$Lim \left(\frac{1}{1 . 2 . 3 . \ldots . x}\right)^{\frac{1}{x}} = 0$$

was sich auf ähnliche Weise deuten läfst, wie das Resultat der vorigen Nummer.

An die Beispiele zum zweiten Theorem knüpft sich noch eine allgemeine Bemerkung. Benutzt man nämlich unmittelbar die Gleichungen $Lim\ x = \infty$ und $Lim \frac{1}{x} = 0$, so erhält man aus dem ersten Beispiele die



Digitized by Google

Gleichung $\infty^0 = 1$, und aus dem fünften, wo offenbar $Lim\,(1.2.3....x) = \infty$ ist, $\infty^0 = \infty$. Bemerkt man hierzu noch, dafs für jedes noch so grofse $x$, $(a^x)^{\frac{1}{x}} = a$, folglich auch $Lim\,(a^x)^{\frac{1}{x}} = a$, mithin für $a > 1$, $\infty^0 = a$ ist, so sieht man jetzt, dafs $\infty^0$ ein ganz unbestimmter Ausdruck ist, weil er sowohl 1, als jede Zahl $a > 1$, wie auch $\infty$ bedeuten kann. — Setzt man ebenso im zweiten und sechsten Beispiele $Lim\,\frac{1}{x} = 0$, $Lim\,\frac{1}{1.2.3...x} = 0$, so erhält man der Reihe nach $0^0 = 1$ und $0^0 = 0$. Nimmt man hierzu noch die Gleichung $Lim\,(a^x)^{\frac{1}{x}} = a$, welche für $a < 1$ in $0^0 = a$ übergeht, so bemerkt man, dafs auch $0^0$ ein unbestimmter Ausdruck ist, weil er sowohl 1, wie 0, als jede dazwischen liegende Gröfse bedeuten kann. Die Ausdrücke $\infty^0$ und $0^0$ gehören also in die Klasse von $\frac{\infty}{\infty}$ und $\frac{0}{0}$ und dürfen ebenso wenig geradezu in eine Rechnung eingeführt werden, als jene.

7) Eine Anwendung von anderweiter Brauchbarkeit ist die folgende. Es sei $f(x) = a + \frac{1}{x+k}$, so ist

$$Lim\left(a + \frac{1}{x+k}\right)^{\frac{1}{x}} = Lim\,\frac{a + \frac{1}{x+k+1}}{a + \frac{1}{x+k}} = 1.$$

Setzt man hier $\frac{1}{x+k} = \delta$, $\frac{1}{x} = \delta'$, wo nun $\delta$ und $\delta'$ zwei bis zur Gränze Null abnehmende Gröfsen bedeuten, so stellt sich das gefundene Besultat in die Form

$$Lim\,(a+\delta)^{\delta'} = 1.$$

8) Mittelst dieses Satzes kann man leicht das allgemeine Theorem

$$Lim\left[\overline{\varphi(x)}^{\psi(x)}\right] = \left[Lim\,\varphi(x)\right]^{Lim\,\psi(x)}$$

beweisen, worin $\varphi$ und $\psi$ zwei beliebige Funktionen bedeuten und der Gränzenübergang sowohl für wachsende als für abnehmende $x$ bewerkstelligt werden kann.

Sei nämlich $Lim\,\varphi(x) = a$, $Lim\,\psi(x) = b$, so folgt umgekehrt $\varphi(x) = a + \delta$, $\psi(x) = b + \delta'$, wo $\delta$ und $\delta'$ Gröfsen bezeichnen, die bis

Digitized by Google

zur Null abnehmen, wenn man in $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ zu den Gränzen übergeht. Es ist nun

$$\overline{\varphi(x)}^{\psi(x)} = (a+\delta)^{b+\delta'} = (a+\delta)^{b}\ (a+\delta)^{\delta'}$$

folglich

$$Lim\left[\overline{\varphi(x)}^{\psi(x)}\right] = Lim\left[(a+\delta)^{b}\right] Lim\left[(a+\delta)^{\delta'}\right]$$

woraus nach dem Obigen folgt

$$Lim\left[\overline{\varphi(x)}^{\psi(x)}\right] = a^{b}.$$

Setzt man hier für $a$ und $b$ ihre Werthe $Lim\ \varphi(x)$ und $Lim\ \psi(x)$ wieder ein, so erhält man das zu beweisende Theorem. Als Beispiel für die Anwendung desselben diene die Frage: welcher Gränze nähert sich bei unbegränzt wachsenden $x$ der Ausdruck:

$$x^{\frac{log\ x}{x^2}}$$

Schreibt man denselben in folgender Form

$$\left(\frac{1}{x^{\frac{1}{x}}}\right)^{\frac{log\ x}{x}}$$

so ist die gesuchte Gränze

$$= \left[Lim\left(\frac{1}{x^{\frac{1}{x}}}\right)\right]^{Lim\left(\frac{log\ x}{x}\right)} = 1^{0}$$

mithin

$$Lim\left(x^{\frac{log\ x}{x^2}}\right) = 1.$$

---

## Capitel II.

## Bestimmung der Natur verschiedener Funktionen aus gegebenen Eigenschaften derselben.

### §. 10.

Form der hierher gehörenden Aufgaben überhaupt.

Wir haben bisher immer die Natur einer Funktion als bekannt angenommen, d. h. wir haben vorausgesetzt, dafs in dem Symbole $f(x)$ die analytischen Operationen, welche auf $x$ angewendet werden sollen, gegeben vorliegen, und haben unter dieser Voraussetzung bereits mancherlei

Digitized by Google

Eigenschaften der Funktionen kennen gelernt. Es liefse sich nun aber auch diese Betrachtungsweise umkehren und die Frage aufwerfen, ob es möglich sei, aus gegebenen Eigenschaften einer ihrer Natur nach unbekannten Funktion die Natur derselben rückwärts zu bestimmen, und wenn, durch welches Verfahren diefs geschehen solle. Aufgaben dieser Art haben einige Ähnlichkeit mit denen der Algebra. In dieser bestimmt man die Werthe unbekannter Gröfsen aus gegebenen Eigenschaften derselben; bei den genannten analytischen Aufgaben dagegen sind nicht Gröfsen das Unbekannte, sondern Rechnungsoperationen; man will wissen, aus welchen Rechnungsoperationen eine Funktion entstehen müsse, damit sie diese oder jene Eigenschaft erlange. Aufgaben dieser Art zu stellen, ist sehr leicht; man braucht nur irgend eine Eigenschaft einer schon bekannten Funktion hinzuschreiben, darauf die Bekanntschaft mit der Natur jener Funktion aufzugeben und umgekehrt zu fragen: welche Funktion ist es, der die genannte Eigenschaft zukommt? Wenn z. B. $x$ und $y$ ganz beliebige, von einander unabhängige veränderliche Gröfsen bedeuten, so hat der Cosinus die Eigenschaft, dafs

$$cos\,(x+y) + cos\,(x-y) = 2\,cos\,x\,cos\,y$$

ist. Die Form der Funktion ist hier die des Cosinus, d. h. für eine beliebige Gröfse erfüllt die Funktion $f(z) = cos\,z$ die obige Gleichung. Kehrt man nun die Aufgabe um, so entsteht die Frage: welche Funktion von $z$, $f(z)$ hat die Eigenschaft, dafs für jedes $x$ und $y$

$$f(x+y) + f(x-y) = 2\,f(x)\,f(y)$$

ist? Hier sind $x$ und $y$ keine unbekannten, sondern beliebige Gröfsen, gesucht wird dagegen die Regel, nach welcher $f(z)$ zu bilden wäre, wenn $z$ gegeben ist. Diese Regel würde sich hier in den Worten aussprechen: „um aus $z$ diejenige Funktion zu erhalten, welche der obigen Gleichung genügt, betrachte man $z$ als Bogen in einem Kreise, dessen Halbmesser die Einheit ist, und nehme den Cosinus dieses Bogens.“

„Aufgaben dieser Art können sogar zwei oder mehrere verschiedene Auflösungen haben, d. h. es kann zwei oder mehr verschiedene Funktionen geben, welche eine genannte Eigenschaft gemeinschaftlich besitzen. So hat z. B. die eben erwähnte Gleichung

$$f(x+y) + f(x-y) = 2\,f(x)\,f(y)$$

aufser der Auflösung $f(z) = cos\,z$ noch eine zweite, nämlich $f(z) = \frac{1}{2}(a^z + a^{-z})$, worin $a$ eine beliebige constante Gröfse bedeutet.

Digitized by Google

Es ist nämlich in diesem Falle

$$f(x+y)+f(x-y)=\frac{1}{2}\left[a^{x+y}+a^{-(x+y)}\right]+\frac{1}{2}\left[a^{x-y}+a^{-(x-y)}\right]$$
$$=\frac{1}{2}\left[a^x\,.\,a^y+a^{-x}\,.\,a^{-y}+a^x\,.\,a^{-y}+a^{-x}\,.\,a^y\right]$$

und zugleich ist

$$2f(x)f(y)=2\,.\,\frac{1}{2}\left(a^x+a^{-x}\right)\,.\,\frac{1}{2}\left(a^y+a^{-y}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left[a^x\,.\,a^y+a^{-x}\,.\,a^y+a^x\,.\,a^{-y}+a^{-x}\,.\,a^{-y}\right]$$

wobei die auf der rechten Seite stehenden Produkte den vorher gefundenen gleich sind, so dafs also auch für $f(z)=\frac{1}{2}\left(a^z+a^{-z}\right)$

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)$$

ist. Diese Gleichung charakterisirt also keine einzelne bestimmte Funktion, und es würde daher zur Bestimmung einer Funktion nicht hinreichen, wenn man sagte, sie habe die genannte Eigenschaft.

Aufgaben, in welchen die Natur einer Funktion aus einer ihrer Eigenschaften bestimmt werden soll, haben auch ihre geometrische Bedeutung. Fragt man z. B., welche Funktion $f(z)$ genügt der Bedingung

$$f(x)+f(y)=f(x+y)$$

so läfst sich diefs geometrisch auf folgende Weise interpretiren. Sei in Fig. 20 die krumme Linie $MNP$ das Bild der gesuchten Funktion, d. h. diejenige Curve, in welcher die Normalen durch die Funktion $f(z)$ aus den zugehörigen auf $OZ$ liegenden Strecken $z$ gefunden werden, sei ferner $OA=x$, $OB=y$, $AM=f(x)$, $BN=f(y)$, so ist, wenn $OC=OA+OB=x+y$ genommen wird, $CP=f(x+y)$. Es soll aber $f(x+y)=f(x)+f(y)$, d. h. $CP=AM+BN$ sein; es fragt sich also: von welcher Funktion, oder von welchen Funktionen mufs $MNP$ das Bild sein, d. h. welcher Zusammenhang mufs zwischen $OA$ und $AM$, ebenso zwischen $OB$ und $BN$ statt finden, wenn für jedes $OC=OA+OB$ die zugehörige Normale $CP$ gleich der Summe der zu $OA$ und $OB$ gehörenden Normalen $AM$ und $BN$ sein soll?

Mit Aufgaben dieser Art wollen wir uns nun in den nächsten Paragraphen beschäftigen, werden aber aus der ungeheuren Menge von Aufgaben, die sich hier darbieten, nur die vier einfachsten und wichtigsten ausheben, die sich in den folgenden vier Gleichungen

Digitized by Google

$$f(x) + f(y) = f(x + y)$$
$$f(x) \cdot f(y) = f(x + y)$$
$$f(x) + f(y) = f(xy)$$
$$f(x) \cdot f(y) = f(xy)$$

darstellen, in welchen die Operationen des Addirens und Multiplizirens bald auf die Funktionen, bald auf die in ihnen enthaltenen Veränderlichen angewendet sind.

## §. 11.

### Auflösung der Gleichung

$$f(x) + f(y) = f(x + y).$$

Wir wollen bei der Auflösung dieses Problems von den einfacheren zu den zusammengesetzteren Fällen fortschreiten und erst versuchen, ob sich die Natur der Funktion $f(x)$ nicht für ganze positive Werthe der Veränderlichen bestimmen läfst. Setzen wir zuvörderst $x = y = 1$, so findet sich $2f(1) = f(2)$; hierdurch haben wir die Kenntnifs von $f(2)$ erlangt, vorausgesetzt, dafs $f(1)$ bekannt ist. Dafs wir aber auf der rechten Seite $f(2)$ bekamen, lag daran, dafs dort zwei Veränderliche $x$ und $y$ vorhanden waren, die wir beide $= 1$ setzen konnten. Wäre es nun möglich, aus der Gleichung

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

andere abzuleiten, in denen stünde

$$f(x + y + z) = \ldots$$
$$f(x + y + z + u) = \ldots$$
$$f(x + y + z + u + t) = \ldots$$

u. s. f.

d. h. wäre man im Stande, die Anzahl der Veränderlichen zu vergröfsern, so würde man dadurch, dafs man

$$x = y = z = u = t = \ldots = 1$$

setzte, auch die Werthe von $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$ u. s. f. bestimmen, also ausmitteln können, von welcher Form die Funktion $f(x)$ für den Fall eines ganzen positiven $x$ wäre. — Dieser Gedanke ist nicht schwer auszuführen; setzt man nämlich in der ursprünglichen Gleichung $x = \alpha$, $y = \beta + z$, wo $\alpha$, $\beta$, $z$ wieder beliebige Gröfsen sind, so ergiebt sich

$$f(\alpha + \beta + z) = f(\alpha) + f(\beta + z). \qquad (1)$$

Die ursprüngliche Gleichung läfst sich aber unter einem doppelten Gesichtspunkte betrachten; einmal lehrt sie, die Summe zweier gleichge-

Digitized by Google

bildeten Funktionen $f(x)$ und $f(y)$ finden; andererseits aber zeigt sie auch, wie man die Funktion $f(x+y)$ in die Summe von $f(x)$ und $f(y)$ zerlegen könne. Wenden wir diefs auf das oben vorkommende $f(\beta+z)$ an, worin $\beta$ und $z$ gerade so beliebige Gröfsen sind, wie früher $x$ und $y$, so ist auch $f(\beta+z)=f(\beta)+f(z)$; folglich wird jetzt aus (1)

$$f(\alpha+\beta+z)=f(\alpha)+f(\beta)+f(z).$$

Für $z=\gamma+u$ ergiebt sich hieraus

$$f(\alpha+\beta+\gamma+u)=f(\alpha)+f(\beta)+f(\gamma+u)$$

oder, wenn man $f(\gamma+u)$ nach der ursprünglichen Gleichung wieder in $f(\gamma)+f(u)$ zerlegt,

$$f(\alpha+\beta+\gamma+u)=f(\alpha)+f(\beta)+f(\gamma)+f(u).$$

Nähme man ferner $u=\delta+v$, so würde man unter Anwendung der nämlichen Zerlegung erhalten:

$$f(\alpha+\beta+\gamma+\delta+v)=f(\alpha)+f(\beta)+f(\gamma)+f(\delta)+f(v).$$

Man sieht auf der Stelle, dafs diese Betrachtung sich beliebig weit fortführen läfst und dafs man auf diese Weise eine beliebige Menge willkührlicher Gröfsen $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, ... $\mu$ einführen könnte. Überhaupt ist nämlich für eine solche Partie Gröfsen:

$$f(\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\mu)=f(\alpha)+f(\beta)+f(\gamma)+\ldots+f(\mu). \quad (2)$$

Da hier $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, ... $\mu$ beliebige Gröfsen bedeuten, so können wir auch dieselben einander gleich und zwar der ersten gleich nehmen, d. i.

$$\beta=\gamma=\delta=\ldots=\mu \text{ und alle } =\alpha$$

setzen. Beträgt nun $m$ die Anzahl der überhaupt vorhandenen Gröfsen, so geht die Gleichung (2) in die folgende über

$$f(m\alpha) = m f(\alpha) \quad (3)$$

welche für jedes beliebige $\alpha$, aber nur für beliebige ganze positive $m$ gilt. Es lassen sich aus derselben mehrere sehr wichtige Folgerungen ziehen, je nachdem man dem willkührlichen $\alpha$ verschiedene Werthe giebt.

1) Nimmt man zuerst $\alpha=1$, so wird

$$f(m) = m f(1) \quad (4)$$

oder, wenn wir $f(1)$, welches einen gewissen constanten Werth haben wird, den wir nicht weiter untersuchen, kurz mit $a$ bezeichnen,

$$f(m) = am \quad (5)$$

d. h. wenn die Veränderliche $x$ eine ganze positive Zahl ist, so ist $f(x)=ax$, also in diesem Falle die Natur der Funktion bestimmt.

2) In der Gleichung (3) nehmen wir jetzt $\alpha$ gleich einem positiven



Digitized by Google

Bruche, gleichviel ob ächt oder unächt, also etwa $\alpha = \frac{p}{q}$. Hierbei können wir immer voraussetzen, dafs $p$ und $q$ ganze positive Zahlen sind, denn wenn auch Zähler und Nenner jenes Bruches selbst wieder Brüche sein sollten, so kann man ihn doch dadurch, dafs man Zähler und Nenner mit einer schicklich gewählten Zahl multiplizirt, auf jene Form bringen. Wir haben jetzt

$$f\left(m\frac{p}{q}\right) = m f\left(\frac{p}{q}\right)$$

Da aber $m$ eine beliebige positive Zahl ist, so können wir auch $m = q$ werden lassen, wodurch sich ergiebt:

$$f(p) = q f\left(\frac{p}{q}\right)$$

also wenn man $f\left(\frac{p}{q}\right)$ als unbekannte Gröfse ansieht,

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{f(p)}{q}.$$

Hier läfst sich aber, weil $p$ eine positive ganze Zahl ist, $f(p)$ nach der vorhin gefundenen Regel bestimmen, nach welcher für jedes positive ganze $x$, $f(x) = ax$, mithin auch $f(p) = ap$ ist. Wir erhalten jetzt

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = a\frac{p}{q}. \qquad (6)$$

d. h. wenn die Veränderliche $x$ ein positiver Bruch ist, so ist $f(x) = ax$.

Da nun jede positive rationale Gröfse entweder eine ganze Zahl, oder ein Bruch ist, so können wir, das Bisherige zusammenfassend, sagen: für jedes positive rationale $x$ ist $f(x) = ax$.

Man sieht aber leicht, dafs diese Form auch für irrationale $x$ richtig bleiben mufs. Denn da man sich irrationalen Zahlen durch rationale Brüche (Dezimalbrüche) ohne Ende nähern kann, und jene Form für alle jene Brüche besteht und nie zu bestehen aufhört, so mufs sie für Irrationalzahlen selbst gültig bleiben. Man kann also sagen: für jede positive Zahl $x$ ist $f(x) = ax$.

Es würde sich nun noch darum handeln, die Form der Funktion $f(x)$ für negative $x$ zu bestimmen. Diese Aufgabe läfst sich leicht auf eine andere reduziren. Setzt man nämlich in der ursprünglichen Gleichung

$$f(x) + f(y) = f(x + y)$$

das ganz beliebige $y = -x$, so wird

Digitized by Google

$$f(x) + f(-x) = f(x - x) = f(0)$$

d. h.

$$f(-x) = f(0) - f(x). \qquad (7)$$

Man würde also $f(-x)$ bestimmen können, wenn man den Werth von $f(0)$ auszumitteln wüfste. Diefs kann aber vermittelst der Gleichung (6) leicht geschehen, wenn man $p$ constant, etwa $= 1$ nimmt, $q$ ins Unendliche wachsen läfst und zur Gränze für wachsende $q$ übergeht. Es ist dann $Lim \frac{1}{q} = 0$ und man erhält

$$f(0) = a \cdot 0 = 0 \qquad (8)$$

und jetzt aus (7)

$$f(-x) = -ax = a(-x). \qquad (9)$$

Fafst man alles Bisherige zusammen, so ergiebt sich das Theorem:

Diejenige Funktion von $x$, welche die Gleichung

$$\left.\begin{array}{c} f(x) + f(y) = f(x + y) \\ \text{erfüllt, ist} \\ f(x) = ax \end{array}\right\} \qquad (10)$$

wobei $x$ jede mögliche Zahl bedeuten kann, und die Bedeutung der Constanten $a$ durch die Gleichung

$$a = f(1) \qquad (11)$$

ausgesprochen ist.

Es zeigt sich hier, dafs es nur eine Funktion giebt, welche der obigen Gleichung Genüge leistet, oder mit anderen Worten, dafs jene Gleichung eine bestimmte Funktion charakterisirt. Sollte nämlich eine zweite Auflösung möglich sein, so müfste sie sich aus dem Gange der Untersuchung selbst ergeben haben, was z. B. dann hätte geschehen können, wenn man aus dem Werthe von $f(\alpha)$ den Werth von $f(m\alpha)$ auf verschiedene Weisen abgeleitet hätte. Da diefs aber nur auf einerlei Weise geht, so kamen wir für den Fall eines positiven ganzen $x$ auch nur zu einer Auflösung und ebenso in den übrigen Fällen.

So wie wir nun in §. 10 der hier behandelten Aufgabe ihre geometrische Bedeutung unterlegten, so können wir nun auch die Auflösung derselben geometrisch interpretiren. Das Bild der Funktion $ax$ ist nämlich, wie schon in §. 4 gezeigt wurde, eine gerade Linie; wollen wir noch wissen, was hier $a$ sei, so brauchen wir nur die Gleichung (11) zu fragen, welche uns sagt, dafs $a$ diejenige Normale sei, welche dem Werthe $x = 1$ entspricht, d. h. die Tangente des Winkels, welchen die Gerade mit



Digitized by Google

der Basis $OX$ der Zeichnung bildet. Nun ist in Fig. 21 für $\angle POX = \alpha$, $OA = x$, $OB = y$, $OC = x + y$,

$$AM = x \tan \alpha, \quad BN = y \tan \alpha$$

folglich

$$AM + AN = (x + y) \tan \alpha.$$

Durch die Formel $f(x) = x \tan \alpha$ wird also hier die Gleichung $f(x) + f(y) = f(x + y)$ befriedigt, weil

$$x \tan \alpha + y \tan \alpha = (x + x) \tan \alpha$$

ist. Der Werth von $\tan \alpha$, d. h. $\alpha$, bleibt hier im Allgemeinen noch unbestimmt, kann aber völlig bestimmt werden, wenn man noch irgend eine andere Bedingung hinzufügt, welcher die Funktion zugleich genügen soll.

## §. 12.

### Auflösung der Gleichung $f(x) \cdot f(y) = f(x + y)$.

Wir können hier einen ganz ähnlichen Gedankengang verfolgen, wie im vorigen Paragraphen. Wir suchen nämlich zuerst die Form der Funktion für ganze positive Werthe der Veränderlichen zu bestimmen und führen defshalb in die Gleichung

$$f(x + y) = f(x) \cdot f(y) \qquad (1)$$

eine gröfsere Menge von veränderlichen Gröfsen ein. Setzen wir nämlich $x = \alpha$, $y = \beta + z$, so wird

$$f(\alpha + \beta + z) = f(\alpha) \cdot f(\beta + z).$$

Die Gleichung (1) lehrt aber nicht nur das Produkt zweier gleichgebildeten Funktionen in eine Funktion zusammenziehen, sondern sie zeigt auch, wie man eine Funktion von der Summe zweier Veränderlichen zerlegen könne. Wenden wir das Letztere hier an, so ergiebt sich

$$f(\alpha + \beta + z) = f(\alpha) \cdot f(\beta) \cdot f(z).$$

Für $z = \gamma + u$ erhält man hieraus unter Anwendung der nämlichen Zerlegung:

$$f(\alpha + \beta + \gamma + u) = f(\alpha) \cdot f(\beta) \cdot f(\gamma) \cdot f(u).$$

Setzt man dieses Verfahren gleichmäfsig fort, so findet man für eine beliebige Anzahl veränderlicher Gröfsen $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, ... $\mu$ die Gleichung

$$f(\alpha + \beta + \gamma + \ldots + \mu) = f(\alpha) \cdot f(\beta) \cdot f(\gamma) \cdot \ldots \cdot f(\mu). \qquad (2)$$

Setzt man hier

$$\beta = \gamma = \delta = \ldots = \mu = \alpha$$

Digitized by Google

und nimmt man an, dafs dieser Gröfsen der Zahl nach $m$ vorhanden sind, so erhält man auf der rechten Seite von (2) ein Produkt von $m$ gleichen Faktoren, also überhaupt:

$$f(m\alpha) = [f(\alpha)]^m \qquad (3)$$

Für $\alpha = 1$ ergiebt sich hieraus zuvörderst

$$f(m) = [f(1)]^m$$

d. h. wenn der Kürze wegen $f(1)$ mit $a$ bezeichnet wird, so ist für ganze positive $x$:

$$f(x) = a^x. \qquad (4)$$

Setzt man dagegen in der Gleichung (3) $\alpha =$ einem positiven Bruche $\frac{p}{q}$, dessen Zähler und Nenner ganze Zahlen sind, so wird

$$f\left(m\frac{p}{q}\right) = \left[f\left(\frac{p}{q}\right)\right]^m.$$

Da hier aber $m$, $p$, $q$ drei beliebige positive ganze Zahlen sind, so hindert nichts, $m = q$ zu nehmen, wodurch man erhält

$$f(p) = \left[f\left(\frac{p}{q}\right)\right]^q$$

und wenn man hieraus durch Ausziehung der $q$ten Wurzel das unbekannte $f\left(\frac{p}{q}\right)$ sucht:

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = \sqrt[q]{f(p)}.$$

Nun ist aber $f(p)$ bekannt, weil man für alle positiven ganzen Werthe der Veränderlichen die Form der Funktion schon kennen gelernt hat. Gemäfs der Gleichung (4) ist nämlich $f(p) = a^p$, mithin

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = \sqrt[q]{a^p} = a^{\frac{p}{q}}. \qquad (5)$$

Wir haben also gleichförmig für alle positiven rationalen $x$

$$f(x) = a^x. \qquad (6)$$

Dieſs mufs auch noch für positive irrationale $x$ gelten, weil man sich ihnen durch rationale Brüche unbegränzt nähern kann und die Gleichung (5) nie zu gelten aufhört, wie grofs auch $p$ und $q$ sein mögen. Nimmt man in (5) $p$ constant, etwa $= 1$, und läfst $q$ ins Unendliche wachsen, so ist

$$Lim\, f\left(\frac{1}{q}\right) = Lim\, a^{\frac{1}{q}}$$

oder

$$f(0) = a^0 = 1. \qquad (7)$$

Digitized by Google

Mittelst dieser Gleichung lassen sich die Werthe von $f(-x)$ bestimmen. Für $y = -x$ erhält man nämlich aus der ursprünglichen Gleichung

$$f(x) \cdot f(-x) = f(0) = 1$$

also

$$f(-x) = \frac{1}{f(x)}$$

d. h.

$$f(-x) = \frac{1}{a^x} = a^{-x}. \qquad (8)$$

Fassen wir nun alles Bisherige zusammen, so können wir sagen:

Diejenige Funktion von $x$, welche der Gleichung

$$\left.\begin{array}{c} f(x) \cdot f(y) = f(x+y) \\ \text{Genüge leistet, ist} \\ f(x) = a^x \end{array}\right\} \qquad (9)$$

wobei $x$ jede mögliche Zahl bezeichnen kann und die Bedeutung der Constanten $a$ durch die Formel

$$a = f(1) \qquad (10)$$

gegeben wird.

Man könnte auch eine allgemeine Theorie der Potenzen auf die hier durchgeführte Untersuchung bauen. Man würde dann so anfangen müssen: Setzt man die Gröfse $a$ als Faktor $m$mal, so wird diefs mit $a^m$ bezeichnet. Demnach ist, wie früher, für ganze positive $x = m$, $f(m) = a^m$, für gebrochene $x = \frac{p}{q}$, $f\left(\frac{p}{q}\right) = \sqrt[q]{a^p}$, für ganze negative $x = -m$, $f(-m) = \frac{1}{a^m}$ und für negative gebrochene $x = -\frac{p}{q}$, $f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{1}{\sqrt[q]{a^p}}$.

Um nun diese vier verschiedenen Formen derjenigen Funktion, welche die Gleichung $f(x)\,f(y) = f(x+y)$ erfüllt, unter eine einzige zu bringen, wollen wir $\sqrt[q]{a^p}$ mit $a^{\frac{p}{q}}$, $\frac{1}{a^m}$ mit $a^{-m}$ und $\frac{1}{\sqrt[q]{a^p}}$ mit $a^{-\frac{p}{q}}$ bezeichnen, und allgemein den Ausdruck $a^x$ für jedes $x$ eine Potenz nennen. Die Definition der Potenz lautet dann so: „Potenz nennt man diejenige Funktion, welche die Gleichung $f(x)\,f(y) = f(x+y)$ befriedigt; für positive ganze $x$ läfst sich dieselbe als ein Produkt gleicher Faktoren ansehen, für andere $x$ aber treten die Interpretationen

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}, \quad a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

Digitized by Google

ein.“ Bei einer solchen Behandlungsweise der Potenzenlehre, welche zuerst L. Crelle in seiner Theorie der Potenzen und Fakultäten ganz vortrefflich ausgeführt hat, lassen sich alle die Schwierigkeiten vermeiden, denen man sonst begegnen mufs.

## §. 13.

### Auflösung der Gleichung $f(x) + f(y) = f(xy)$.

Um zuvörderst die Anzahl der Veränderlichen zu vermehren, setze man in der Gleichung

$$f(xy) = f(x) + f(y) \qquad (1)$$

$\alpha$ für $x$ und $\beta z$ für $y$, so ergiebt sich

$$f(\alpha\beta z) = f(\alpha) + f(\beta z)$$

oder, wenn man $f(\beta z)$ nach der Gleichung $f(xy)$ zerlegt,

$$f(\alpha\beta z) = f(\alpha) + f(\beta) + f(z).$$

Setzt man wieder $\gamma u$ für $z$, so erhält man durch abermalige Zerlegung rechts

$$f(\alpha\beta\gamma u) = f(\alpha) + f(\beta) + f(\gamma) + f(u).$$

Überhaupt gilt für die Veränderlichen $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, ... $\mu$ die Gleichung

$$f(\alpha\beta\gamma \ldots \mu) = f(\alpha) + f(\beta) + f(\gamma) + \ldots + f(\mu). \qquad (2)$$

Nimmt man die Gröfsen $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, ... $\mu$ einander gleich und gleich der ersten und bestimmt man, dafs die Anzahl der vorhandenen Gröfsen $m$ sei, so wird

$$f(\alpha^m) = m f(\alpha), \qquad (3)$$

und diefs gilt für jedes beliebige $\alpha$, aber nur für ganze positive $m$. Man kann aber hieraus eine andere Gleichung ableiten, in welcher auch der Exponent beliebig ist. Für $\alpha = a^{\frac{p}{q}}$, worin $a$ eine beliebige constante Gröfse, $p$ und $q$ willkührliche ganze Zahlen bedeuten, erhält man nämlich

$$f\left(a^{m\frac{p}{q}}\right) = m f\left(a^{\frac{p}{q}}\right)$$

Da aber $m$, $p$ und $q$ beliebige ganze Zahlen sind, so darf man auch $m = q$ nehmen, wodurch sich die obige Gleichung in

$$f(a^p) = q f\left(a^{\frac{p}{q}}\right)$$

oder

$$f\left(a^{\frac{p}{q}}\right) = \frac{1}{q} f(a^p)$$

Digitized by Google

verwandelt, worin der Werth von $f(a^p)$ sich aus (2) bestimmen läfst, wenn man sich für die beliebige Gröfse $\alpha$ dort unser $a$ und für jene ganze Zahl $m$ unser $p$ substituirt denkt. Es wird jetzt

$$f\left(a^{\frac{p}{q}}\right) = \frac{p}{q} f(a). \qquad (4)$$

Da nun $\frac{p}{q}$ jede ganze, ächt oder unächt gebrochene rationale positive Gröfse bezeichnen kann und die vorstehende Gleichung offenbar auch für positive irrationale Zahlen gelten mufs, weil man sich diesen durch rationale Brüche ohne Ende nähern kann, so darf man jetzt sagen: für jede beliebige positive Gröfse $\mu$ ist

$$f(a^\mu) = \mu f(a). \qquad (5)$$

Nimmt man in der Gleichung (4) die Zahl $p$ constant, etwa $= 1$, vergröfsert dagegen $q$ ins Unendliche und geht zur Gränze für unendlich wachsende $q$ über, so wird $Lim\ a^{\frac{1}{q}} = a^0 = 1$, folglich

$$f(1) = 0. \qquad (6)$$

Um noch zu erfahren, was $f(a^{-\mu})$ sei, nehme man in der ursprünglichen Gleichung

$$f(x) + f(y) = f(xy)$$

$x = a^\mu$ und $y = a^{-\mu}$; es ergiebt sich dann unter Benutzung des mit (6) bezeichneten Resultates:

$$f(a^\mu) + f(a^{-\mu}) = 0$$

folglich

$$f(a^{-\mu}) = -f(a^\mu) = (-\mu) f(a). \qquad (7)$$

Vergleicht man dieſs mit (5), so heifst es jetzt: für jedes beliebige $\mu$ und ein willkührliches, aber constantes $a$ ist

$$f(a^\mu) = \mu f(a). \qquad (8)$$

Um hieraus $f(x)$ abzuleiten, braucht man blos $a^\mu = x$ zu setzen, woraus folgt

$$\mu = log\ x,\ bas\ a.$$

Aufserdem wird $f(a)$ irgend einen constanten Werth haben, den wir mit $k$ bezeichnen wollen; hiernach wird nun

$$f(x) = k\ log\ x. \qquad (9)$$

Dieſs gilt nur so lange, als $x$ eine positive Gröfse bedeutet; denn man

Digitized by Google

mag eine positive Grundzahl $a$ auf positive oder negative Potenzen erheben, so wird doch die Potenz selbst immer positiv; es ist also für positive $a$ und beliebige $\mu$ die Potenz $a^{\mu}$, d. i. $x$, immer positiv.

Wollte man aber $a$ selbst negativ nehmen, so bekäme man bei stetiger Änderung des $\mu$ gar keine stetige Folge von Werthen für $x$; setzte man z. B. $(-a)$ für $a$ und liefse $\mu$ von 2 bis 1 gehen, so erhielte man der Reihe nach:

$$(-a)^2 = +a^2$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$(-a)^{1+\frac{1}{2}} = (-a)(-a)^{\frac{1}{2}} = (-a)\sqrt{-a}, \text{ unmöglich}$$
$$(-a)^{1+\frac{1}{3}} = (-a)(-a)^{\frac{1}{3}} = (-a)\sqrt[3]{-a}, \text{ möglich}$$
$$(-a)^{1+\frac{1}{4}} = (-a)(-a)^{\frac{1}{4}} = (-a)\sqrt[4]{-a}, \text{ unmöglich}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$(-a)^1 = -a$$

also gar keine stetige Aufeinanderfolge in den Werthen von $x$. — Welche für negative $x$ die Form der Funktion $f(x)$ in (9) sein möge, läfst sich mithin aus den bisherigen Betrachtungen nicht entscheiden; spätere Untersuchungen werden uns hierüber Aufschlufs verschaffen.

Diejenige Funktion also, welche die Gleichung

$$\left.\begin{array}{c} f(x) + f(y) = f(xy) \\ \text{befriedigt, ist} \\ f(x) = k \log x \end{array}\right\} \qquad (10)$$

in welcher $k$ eine beliebige Constante, $x$ eine wesentlich positive Veränderliche bezeichnet.

## §. 14.

### Auflösung der Gleichung $f(x) \cdot f(y) = f(xy)$.

Zur Vermehrung der Anzahl der Veränderlichen setzen wir $\alpha$ für $x$ und $\beta z$ für $y$, so dafs

$$f(\alpha\beta z) = f(\alpha) \cdot f(\beta z) \qquad (1)$$

wird und zerlegen hier $f(\beta z)$ in $f(\beta) f(z)$, wodurch die Gleichung

$$f(\alpha\beta z) = f(\alpha) \cdot f(\beta) \cdot f(z)$$

hervorgeht. Nimmt man hier $z = \gamma u$ und zerlegt $f(z)$, d. h. $f(\gamma u)$ wieder in $f(\gamma) f(u)$, so findet man weiter

$$f(\alpha\beta\gamma u) = f(\alpha) \cdot f(\beta) \cdot f(\gamma) \cdot f(u)$$

Digitized by Google

und überhaupt für eine beliebige Partie veränderlicher Gröfsen $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\ldots$ $\mu$,

$$f(\alpha\beta\gamma \ldots \mu) = f(\alpha) \cdot f(\beta) \cdot f(\gamma) \cdot \ldots \cdot f(\mu). \quad (2)$$

Daraus ergiebt sich für $\beta = \gamma = \delta = \ldots = \mu = \alpha$, vorausgesetzt, dafs die Anzahl der Veränderlichen $m$ beträgt,

$$f(\alpha^m) = [f(\alpha)]^m. \quad (3)$$

Diese Gleichung, welche für beliebige $\alpha$, aber nur für ganze positive $m$ gilt, läfst sich noch etwas verallgemeinern, wenn man setzt

$$\alpha = a^{\frac{p}{q}}$$

wo $a$ eine willkührliche constante Gröfse, $p$ und $q$ beliebige ganze Zahlen bedeuten. Es wird nämlich:

$$f\left(\alpha^{m\frac{p}{q}}\right) = \left[f\left(a^{\frac{p}{q}}\right)\right]^m$$

welche Gleichung sich dadurch, dafs man von den drei beliebigen ganzen Zahlen $m$, $p$, $q$ die erste der letzten gleich nimmt, in die einfachere verwandelt:

$$f(a^p) = \left[f\left(a^{\frac{p}{q}}\right)\right]^q$$

woraus folgt

$$f\left(a^{\frac{p}{q}}\right) = [f(a^p)]^{\frac{1}{q}}$$

d. h. wenn man die Gleichung (3) in Anwendung bringt,

$$f\left(a^{\frac{p}{q}}\right) = [f(a)]^{\frac{p}{q}}. \quad (4)$$

Da $\frac{p}{q}$ jede rationale positive Gröfse bedeuten kann, so heifst dies mit anderen Worten: für jedes positive rationale $\mu$ ist

$$f(a^\mu) = [f(a)]^\mu \quad (5)$$

und dies mufs auch noch für positive irrationale $\mu$ gelten, weil man sich diesen durch rationale Brüche unbegränzt nähern kann.

Läfst man in der Gleichung (4) für $p = 1$ den Nenner $q$ ins Unendliche zunehmen und geht zur Gränze über, so findet sich, weil $Lim \frac{1}{q} = 0$ ist,

$$f(a^0) = [f(a)]^0, \text{ d. h. } f(1) = 1. \quad (6)$$

Nimmt man ferner in der ursprünglichen Gleichung

$$f(x)\, f(y) = f(xy)$$

$x = a^\mu$ und $y = a^{-\mu}$, so wird

Digitized by Google

$$f(a^{\mu})\, f(a^{-\mu}) = f(a^0) = 1$$

folglich

$$f(a^{-\mu}) = \frac{1}{f(a^{\mu})}$$

d. h. nach (5)

$$f(a^{-\mu}) = \frac{1}{[f(a)]^{\mu}} = [f(a)]^{(-\mu)}.$$

Durch Vergleichung mit dem Resultate in (5) ergiebt sich nun der Satz: für jedes beliebige $\mu$ ist

$$f(a^{\mu}) = [f(a)]^{\mu}. \qquad (7)$$

Um hieraus $f(x)$ zu bestimmen, braucht man blos $a^{\mu} = x$ zu setzen, woraus

$$\mu = log\, x, \quad bas\ a$$

folgt. Es ist also:

$$f(x) = [f(a)]^{log\, x}.$$

Man hat aber überhaupt für jedes $b$ und $x$

$$b^{log\, x} = x^{log\, b} \qquad (8)^*)$$

folglich hier

$$f(x) = x^{log\, f(a)}$$

oder, wenn man die Constante $log\, f(a)$ mit $k$ bezeichnet,

$$f(x) = x^k, \qquad (9)$$

wobei $x$ wieder blos positive Werthe haben kann, weil es, wie im vorigen Paragraphen, $= a^{\mu}$ war.

Diejenige Funktion also, welche die Gleichung

$$\left.\begin{array}{c} f(x) \cdot f(y) = f(xy) \\ f(x) = x^k \end{array}\right\} \qquad (10)$$

befriedigt, ist

wobei $k$ eine willkührliche Constante, $x$ eine wesentlich positive Veränderliche bezeichnet.

*) Der Beweis hiervon lautet so: Für $a$ als Basis ist $b = a^{log\, b}$, also $b^{log\, x} = (a^{log\, b})^{log\, x} = a^{log\, b\, .\, log\, x} = a^{log\, x\, .\, log\, b} = (a^{log\, x})^{log\, b} = x^{log\, b}$.

Digitized by Google

# Capitel III.

## Bestimmung der Natur der Funktionen aus gegebenen speziellen Werthen derselben.

### §. 15.

Hierher gehörende Aufgaben überhaupt.

Für jeden speziellen Werth der in einer Funktion enthaltenen Veränderlichen giebt die Funktion selbst gewisse Werthe, welche durch gewisse Rechnungsoperationen, die eben die Natur der Funktion ausmachen, aus jenen Werthen der Veränderlichen hergeleitet werden können. Dieſs setzt voraus, daſs diese Rechnungsoperationen selbst bekannt sind; ist dieſs aber nicht der Fall, so entsteht umgekehrt die Frage, welcher Natur eine gewisse Funktion gewesen sein muſs, welche für die und die speziellen Werthe der Veränderlichen diese und diese speziellen Werthe angenommen hat. Bestimmter ausgesprochen lautet diese Frage auch so: Wenn $x$ eine unabhängige und $y$ eine von dieser abhängige veränderliche Gröſse bezeichnet, welcher Art muſs dann diese Abhängigkeit sein, wenn für gegebene spezielle Zahlenwerthe von $x$, die wir $x_1, x_2, \ldots x_n$ nennen wollen, ebensoviel entsprechende gegebene Zahlenwerthe von $y$, genannt $y_1, y_2, \ldots y_n$, herauskommen sollen?

Es ist nicht schwer, vorerst die geometrische Bedeutung einer solchen Frage einzusehen. Wären z. B. drei zusammengehörende spezielle Werthe von $x$ und $y$, nämlich $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3$ gegeben, so schneide man in Fig. 22 von einem Punkte $O$ aus auf einer unbegränzten Geraden $OX$ die Strecken $OA = x_1$, $OB = x_2$, $OC = x_3$ ab und errichte in den Punkten $A$, $B$, $C$ die Normalen $AM = y_1$, $BN = y_2$, $CP = y_3$. Hierdurch sind die Lagen von drei Punkten $M$, $N$, $P$ bestimmt. Man sucht aber den Zusammenhang zwischen $x$ und $y$, d. h. man will wissen, welcher Natur die Funktion $f(x)$ sein soll, wenn aus der Gleichung $y = f(x)$ die speziellen Werthe $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$, $f(x_3) = y_3$ folgen sollen. Denken wir uns nun das Bild der gesuchten Funktion gezeichnet, so muſs die ihr entsprechende krumme Linie durch die Punkte $M$, $N$, $P$ gehen, weil für $x = x_1, x_2, x_3$, d. h. für $x =$ $OA$, $OB$, $OC$, herauskommen soll $y = y_1, y_2, y_3$, d. h. $y = AM$,

Digitized by Google

*BN*, *CP*. Die Aufgabe ist also die, durch drei oder mehrere gegebene Punkte eine krumme Linie zu ziehen und für jedes beliebige $OS = x$ anzugeben, wie daraus das zugehörige $ST = y$ gefunden wird.

Man sieht auf der Stelle ein, dafs eine solche Aufgabe eine unbestimmte ist, weil durch die nämliche Anzahl von gegebenen Punkten ganz verschiedene krumme Linien gehen können. Diefs zeigt sich auch arithmetisch. Verlangte man z. B. eine Funktion, welche folgende Werthe gäbe:

$$\begin{aligned} \text{für } x &= 0, \quad y = 12 \\ - \; x &= 5, \quad y = 13 \\ - \; x &= 9, \quad y = 15 \end{aligned}$$

so liefsen sich eine Menge von Funktionen finden, welche diese Bedingungen erfüllten, z. B.

$$y = \sqrt{x^2 + 144} \text{ oder auch } y = \frac{1}{30}x^2 + \frac{1}{30}x + 12$$

wie man leicht durch Einsetzung der Werthe 0, 5, 9 für $x$ verifiziren würde. Diese beiden Funktionen sind aber ihrer Natur nach ganz verschieden, die erste ist irrational, während die zweite rational ist; beide sind aber algebraische Funktionen.

Weil nun bei der grofsen Unbestimmtheit jenes Problemes an eine Auflösung im Allgemeinen nicht zu denken ist, so wollen wir die Aufgabe selbst spezieller stellen und nur fragen, „welches ist diejenige algebraische ganze und rationale Funktion $y = f(x)$, welche für eine Anzahl gegebener Werthe von $x$ eine entsprechende Reihe gegebener Werthe von $y$ erzeugt?“

Da die Auflösung dieses Problemes offenbar nur durch besondere Eigenthümlichkeiten der algebraischen ganzen und rationalen Funktionen möglich sein kann, so haben wir zunächst über diese einige Betrachtungen anzustellen.

## §. 16.

### Wichtigste Eigenschaften der algebraischen, ganzen und rationalen Funktionen.

Wenn $y$ eine algebraische ganze und rationale Funktion von $x$ ist, so hat man bekanntlich nach der in §. 3 gegebenen Definition

$$y = A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + \ldots + A_nx^n \quad (1)$$

worin die ganze positive Zahl $n$ den Grad der Funktion angiebt. Man kann sich nun denken, dafs es einen speziellen Zahlenwerth von $x$, etwa

Digitized by Google

$x_1$ genannt, geben könne, für welchen sich die ganze Funktion annullirt, d. h. $y = 0$ wird. In der That hätte man, um einen solchen Werth zu finden, weiter nichts zu thun, als

$$A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + \ldots + A_1 x + A_0 = 0$$

zu setzen, hierin die bisher unbestimmte Gröfse $x$ als Unbekannte anzusehen und diese algebraische Gleichung aufzulösen. Diefs würde zwar allgemein nicht mehr möglich sein, wenn die Gleichung von einem höheren als dem vierten Grade wäre, wäre aber wenigstens immer ausführbar, wenn die Werthe von $A_n$, $A_{n-1}$, $\ldots$ $A_1$, $A_0$ in Zahlen gegeben sind. Gesetzt also, man habe auf irgend eine Weise, sei es nun durch Auflösung der Gleichung oder durch Rathen und Probiren, einen solchen Werth $x_1$ gefunden, so hat man die Gleichung

$$0 = A_0 + A_1 x_1 + A_2 x_1^2 + \ldots + A_n x_1^n.$$

Subtrahirt man dieselbe von (1), so ergiebt sich

$$y = A_1(x - x_1) + A_2(x^2 - x_1^2) + \ldots + A_n(x^n - x_1^n). \quad (2)$$

Es ist aber ein bekannter Satz, dafs für jedes $x$ und $\alpha$ die Differenz der $m$ten Potenzen $x^m - \alpha^m$, wobei $m$ jede beliebige positive ganze Zahl bedeuten darf, durch die Differenz der Wurzeln $x - \alpha$ ohne Rest theilbar ist. Man findet nämlich durch Division

$$\frac{x^m - \alpha^m}{x - \alpha} = x^{m-1} + x^{m-2}\alpha + x^{m-3}\alpha^2 + \ldots + x\alpha^{m-2} + \alpha^{m-1}$$

wovon man sich auch rückwärts durch beiderseitige Multiplikation mit $x - \alpha$ überzeugen kann. Denken wir uns jetzt $x_1$ für $\alpha$ und der Reihe nach 1, 2, 3, $\ldots$ $n$ für $m$ gesetzt, so bemerken wir, dafs in der Gleichung (2) jedes einzelne Glied durch $x - x_1$ ohne Rest theilbar ist. Es mufs folglich $x - x_1$ auch in der Summe jener Glieder, d. h. in $y$ aufgehen. Ist also $x_1$ ein spezieller Zahlenwerth von $x$, durch welchen sich die Gleichung

$$y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_n x^n$$

auf Null reduzirt, so ist $x - x_1$ ein Faktor von $y$. Fände sich aufser dem erwähnten Werthe $x_1$ noch ein zweiter $x_2$, welcher $y = 0$ machte, so ginge auch $x - x_2$ in $y$ auf, und da $x - x_1$ schon darin aufgeht, so mufs jetzt auch das Produkt $(x - x_1)(x - x_2)$ in $y$ aufgehen. Fänden sich ferner $n$ solcher verschiedener Werthe von $x$, also so viele, als der Grad der Funktion beträgt, die wir durch $x_1$, $x_2$, $x_3$, $\ldots$ $x_n$ bezeichnen wollen, so ginge nun auch das Produkt

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \ldots . (x - x_n)$$

Digitized by Google

in $y$ auf. Der Quotient, welchen man erhält, wenn man mit diesem Produkt in $y$ dividirt, mufs dann eine constante Gröfse sein, oder in Zeichen: für

$$\frac{A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_n x^n}{(x - x_1)\,(x - x_2) \ldots\ldots (x - x_n)} = k$$

ist $k$ von $x$ unabhängig. Denn es folgt daraus

$$A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_n x^n = k(x - x_1)\,(x - x_2)\,(x - x_3) \ldots\ldots (x - x_n)$$

und wenn man hier die angedeuteten Multiplikationen ausführte, so würde man, weil $n$ Faktoren vorhanden sind, in deren jedem $x$ einmal vorkommt, rechts eine algebraische ganze rationale Funktion von $x$ bekommen. Wäre nun $k$ von $x$ abhängig, so würde durch Multiplikation mit $k$ der Grad der Funktion rechts erhöht oder erniedrigt werden, und zwar erhöht, wenn $x$ in $k$ mit positiven, erniedrigt, wenn es mit negativen Potenzen vorkäme. Es müfste also eine algebraische ganze rationale Funktion von $x$ für alle möglichen Werthe dieser Veränderlichen einer zweiten solchen Funktion, aber von anderem Grade, gleich sein, was offenbar unmöglich ist.

In der That ist dieser Quotient $k$ nichts Anderes, als der Coeffizient $A_n$ der höchsten vorkommenden Potenz von $x$. Z. B. man findet leicht, dafs die Funktion

$$y = 10 - 15x + 5x^2$$

für $x = 1$ und $x = 2$ verschwindet. Für $n = 2$, $x_1 = 1$ und $x_2 = 2$ ist also hier

$$\frac{10 - 15x + 5x^2}{(x - 1)\,(x - 2)} = k.$$

Nun ist aber der Zähler $= 5\,(x^2 - 3x + 2)$ und der Nenner $= x^2 - 3x + 2$, also $k = 5$, d. h. gleich dem Coeffizienten der höchsten Potenz $x^2$.

Weifs man also von einer ganzen algebraischen rationalen Funktion, dafs sie vom Grade $n$ ist, und dafs sie für $n$ gegebene Werthe $x_1$, $x_2$, $\ldots$ $x_n$ verschwindet, so kann man setzen

$$f(x) = k(x - x_1)\,(x - x_2) \ldots (x - x_n) \qquad (3)$$

wobei $k$ eine constante Gröfse bedeutet.

Von diesem Theoreme werden wir nun sogleich eine Anwendung machen.

Digitized by Google

## §. 17.

### Das Interpolationsproblem.

Wir kehren jetzt zu der am Ende von §. 15 gestellten Aufgabe zurück, nach welcher uns obliegt, aus einer Reihe von Werthen einer Funktion, welche einer Reihe spezieller Werthe der Veränderlichen angehören, das allgemeine Gesetz abzuleiten, wonach diese entsprechenden Werthe zusammenhängen, vorausgesetzt, dafs dieser Zusammenhang durch eine algebraische ganze rationale Funktion ausgedrückt werde. Dieses Problem führt auch den Namen des Interpolationsproblemes, weil man durch seine Lösung in den Stand gesetzt wird, zwischen gegebenen Werthen einer Funktion andere einzuschalten, d. h. zu interpoliren.

Es sei also $y$ diejenige noch unbekannte Funktion von $x$, welche für $n$ gegebene spezielle Zahlenwerthe von $x$, nämlich $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$, die correspondirenden, ebenfalls gegebenen Zahlenwerthe $y_1, y_2, y_3, \ldots y_n$ annehmen soll.

Wir können uns hier zuvörderst denken, dafs das $y$, welches zu einem beliebigen $x$ gehört, aus aliquoten Theilen der schon gegebenen Werthe $y_1, y_2, \ldots y_n$ zusammengesetzt sei. So können wir z. B. in Fig. 22 voraussetzen, dafs $ST = y$, welches zu $OS = x$ gehört, aus Stücken der schon vorhandenen Normalen $AM = y_1$, $BN = y_2$, $CP = y_3$ bestehe. Es würde sich also blos darum handeln, zu bestimmen, wie viel von jeder solchen Senkrechten zu nehmen sei. Setzen wir demnach

$$ST = q_1 AM + q_2 BN + q_3 CP$$

so können wir uns unter $q_1, q_2, q_3$ gewisse Zahlen vorstellen, welche angeben, wie viel von $AM$, $BN$, $CP$ genommen werden mufs, damit die Summe dieser Theile $= ST$ werde. Diese Gröfsen $q_1, q_2, q_3$ werden aber selbst von $x$ abhängen oder Funktionen von $x$ sein, weil man offenbar mehr oder weniger von den einzelnen Normalen zu nehmen hat, je nachdem $x$ andere und andere Werthe annimmt. Nehmen wir also gleich allgemein an

$$y = q_1 y_1 + q_2 y_2 + q_3 y_3 + \cdots + q_n y_n \qquad (4)$$

so haben wir es noch mit der Bestimmung von $q_1, q_2, \ldots q_n$ als Funktionen von $x$ zu thun. Da wir aber für $y$ nur eine algebraische ganze rationale Funktion suchen, so brauchen wir auch $q_1, q_2, \ldots q_n$ nur als solche Funktionen anzusehen, weil dann die Summe der Produkte $q_1 y_1$,

Digitized by Google

$q_2 y_2, \ldots q_n y_n$, in denen $y_1, y_2, \ldots y_n$ constante Gröfsen sind, ebenfalls eine algebraische ganze rationale Funktion von $x$ ist. Suchen wir nun die Bedingungen auf, welchen die Funktionen $q_1, q_2, \ldots q_n$ unterworfen sind:

1) Für $x = x_1$ mufs $y = y_1$ herauskommen; es mufs also in diesem Falle $q_1 = 1$ und $q_2 = q_3 = q_4 \ldots = q_n = 0$ sein.
2) Für $x = x_2$ soll $y = y_2$ werden; folglich ist für diesen Fall $q_2 = 1$, dagegen $q_1 = q_3 = q_4 \ldots = q_n = 0$.
3) Für $x = x_3$ mufs $y = y_3$ zum Vorschein kommen; mithin wird $q_3 = 1$ und $q_1 = q_2 = q_4 = q_5 \ldots = q_6 = 0$.

Man übersieht leicht den Fortgang dieser Schlüsse, und kann ihn in folgendem Schema zusammenstellen:

| $x$ | $q_1$, $q_2$, $q_3$, $q_4$, $\ldots$ $q_n$ |
|---|---|
| $x_1$ | 1, 0, 0, 0, .... 0 |
| $x_2$ | 0, 1, 0, 0, .... 0 |
| $x_3$ | 0, 0, 1, 0, .... 0 |
| $x_4$ | 0, 0, 0, 1, .... 0 |
| . | . . . . |
| . | . . . . |
| . | . . . . |
| $x_n$ | 0, 0, 0, 0, .... 1. |

worin der einem $x$ entsprechende Werth eines $q$ gefunden werden kann, wenn man vom $x$ horizontal und vom $q$ vertikal fortschreitet, bis beide Wege zusammentreffen.

Bezeichnet nun $q_r$ irgend eine von den Gröfsen $q_1, q_2, \ldots q_n$, so lassen sich die Bedingungen, welchen dieses $q_r$ unterworfen ist, so aussprechen:

Für $x = x_r$ mufs $q_r = 1$ werden, für jeden anderen Werth dagegen, also für

$$x = x_1, x_2, \ldots x_{r-1}, x_{r+1}, \ldots x_n$$

mufs es sich auf Null reduziren.

Diese letztere Eigenschaft wird uns vorzüglich zur Bestimmung der Form von $q_r$ nützlich, weil wir unter der Voraussetzung, dafs $q_r$ eine algebraische ganze rationale Funktion sei, nach Formel (3) nun setzen dürfen:

$$q_r = k(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_{r-1})(x - x_{r+1}) \ldots (x - x_n)$$

worin $k$ eine constante Gröfse bedeutet. Der Werth derselben läfst sich



Digitized by Google

vermöge der Bedingung, dafs für $x = x_r$, $q_r = 1$ werden mufs, leicht bestimmen; es ist nämlich für $x = x_r$

$$1 = k(x_r - x_1)(x_r - x_2) \dots (x_r - x_{r-1})(x_r - x_{r+1}) \dots (x_r - x_n).$$

Um aus diesen beiden Gleichungen $k$ zu eliminiren, dividiren wir die erste durch die zweite und erhalten:

$$q_r = \frac{(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{r-1})(x - x_{r+1}) \dots (x - x_n)}{(x_r - x_1)(x_r - x_2) \dots (x_r - x_{r-1})(x_r - x_{r+1}) \dots (x_r - x_n)} \quad (5)$$

wodurch der Werth eines beliebigen $q$ bestimmt ist. Setzt man diefs für $r = 1, 2, 3, \dots n$ in die Formel (4), so ergiebt sich

$$\left.\begin{aligned} y = {} & \frac{(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4) \dots (x - x_n)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4) \dots (x_1 - x_n)} y_1 \\ & + \frac{(x - x_1)(x - x_3)(x - x_4) \dots (x - x_n)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4) \dots (x_2 - x_n)} y_2 \\ & + \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_4) \dots (x - x_n)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)(x_3 - x_4) \dots (x_3 - x_n)} y_3 \\ & + \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ & \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ & + \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \dots (x - x_{n-1})}{(x_n - x_1)(x_n - x_2)(x_n - x_3) \dots (x_n - x_{n-1})} y_n \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

ein unter dem Namen der Interpolationsformel von Lagrange bekannter Ausdruck.

Die algebraische Funktion $y$, welche man durch Anwendung dieser Formel erhält, ist vom Grade $n - 1$, weil jedes einzelne Glied $n - 1$ von $x$ abhängige Faktoren enthält, in denen allen $x$ als erste Potenz auftritt; der Grad der Funktion beträgt also eine Einheit weniger als die Anzahl der gegebenen speziellen Werthe derselben. Da nun hier die Funktion durch eine Partie von Werthen, deren Anzahl den Grad der Funktion um Eins übersteigt, vollkommen bestimmt ist, so kann man folgenden Satz aussprechen:

Geben zwei algebraische rationale Funktionen desselben Grades $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ für eine Partie spezieller Werthe von $x$, welche $x_1, x_2, x_3, \dots x_m$ heifsen mögen, die nämlichen Resultate, ist also

$$\varphi(x_1) = \psi(x_1),\ \varphi(x_2) = \psi(x_2),\ \dots\ \varphi(x_m) = \psi(x_m)$$

und zugleich die Anzahl $m$ dieser Werthe um Eins gröfser, als der Grad der Funktionen, so sind diese überhaupt identisch, d. h. es ist dann für jedes $x$, $\varphi(x) = \psi(x)$.

Digitized by Google

Dieſs gilt offenbar um so mehr, wenn die Anzahl der speziellen Werthe von $x$, für welche die Funktionen übereinstimmen, noch gröſser ist.

Dieser Satz kann mit vielem Nutzen gebraucht werden, wenn man die Identität zweier solchen Funktionen beweisen will, ohne sich mühsamen Reduktionen zu unterziehen. Kann man z. B. zeigen, daſs dieselben für alle möglichen ganzen positiven Werthe identisch sind, was oft sehr leicht ist, so hat man hierdurch ihre Identität im Allgemeinen bewiesen. Wir werden später hiervon ein Beispiel sehen.

Als spezielle Fälle der Interpolationsformel sind folgende von Interesse:

1) Für $n = 3$ erhält man

$$\left.\begin{aligned} y = \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}\,y_1 + \frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}\,y_2 \\ + \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}\,y_3 \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

mittelst welcher Formel man aus drei Werthen eine Funktion zweiten Grades bestimmt*). Verlangte man z. B. eine Funktion, welche für $x = -1$, $x = \frac{1}{2}$, $x = 5$ der Reihe nach gäbe: $y = 9$, $y = 3$, $y = 39$, so würde man setzen

$$y = \frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-5)}{\left(-1-\frac{1}{2}\right)(-1-5)} \cdot 9 + \frac{(x+1)(x-5)}{\left(\frac{1}{2}+1\right)\left(\frac{1}{2}-5\right)} \cdot 3 + \frac{(x+1)\left(x-\frac{1}{2}\right)}{(5+1)\left(5-\frac{1}{2}\right)} 39$$

woraus man nach gehöriger Reduktion findet

$$y = 2x^2 - 3x + 4.$$

Sind in Formel (6) $y_1 = y_2 = y_3 = \ldots = y_n = 1$, so ist die Funktion überhaupt eine Constante und für jedes $x$, $y = 1$. Man hat dann für jedes $x$ die identische Gleichung:

*) Für die analytische Geometrie ist hiermit die Aufgabe gelöst, durch drei Punkte eine Parabel zu ziehen, deren Achse den $y_1$, $y_2$, $y_3$ parallel liegt.



Digitized by Google

$$1 = \frac{(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_n)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\ldots(x_1-x_n)} + \frac{(x-x_1)(x-x_3)\ldots(x-x_n)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)\ldots(x_2-x_n)} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_1)(x_n-x_2)\ldots(x_n-x_{n-1})}$$

wovon man sich in speziellen Fällen durch wirkliche Ausführung der Rechnung leicht überzeugen kann.

---

# Capitel IV.

# Von den endlichen und unendlichen Reihen.

## §. 18.

### Entstehung der Reihen überhaupt.

Wir haben in §. 5 ein Beispiel von der Zerlegung einer Gröfse in eine unendliche Menge immer kleiner werdender Theile kennen gelernt; dort stand dasselbe, um den Begriff der Gränze zu erläutern, hier kommen wir auf dasselbe zurück, um weitere Betrachtungen daran zu knüpfen.

Man sieht leicht ein, dafs ein und die nämliche Gröfse auf ganz verschiedene Weisen in Theile zerlegt werden kann, je nachdem man das eine oder andere Gesetz der Theilung zu Grunde legt. So hatten wir in §. 5 die Zerlegung der Einheit durch fortgesetzte Halbirung bewerkstelligt, man würde aber ebenso leicht nach Drittheilen, Viertheilen u. s. f. zerlegen können. Theilt man nämlich eine Linie $AB$ (Fig. 23) in drei gleiche Theile und nimmt $AM = \frac{2}{3}AB$, so bleibt noch $\frac{1}{3}AB$ übrig. Dieses wird wieder in drei Theile getheilt und zwei davon zu $AM$ gethan; man erhält dann $\frac{2}{3}AB + \frac{2}{3}MB$, d. h. $\frac{2}{3}AB + \frac{2}{9}AB$, und es bleibt $BP = \frac{1}{9}AB$ übrig. Verfährt man hiermit wieder so und setzt überhaupt diese Theilung ins Unendliche fort, so erhält man

$$\frac{2}{3}AB + \frac{2}{9}AB + \frac{2}{27}AB + \frac{2}{81}AB + \ldots$$

Digitized by Google

und da man sich hierdurch der ganzen Linien $AB$ unbegränzt nähert, so kann man jetzt sagen: es ist

$$AB = \frac{2}{3}AB + \frac{2}{9}AB + \frac{2}{27}AB + \cdots$$

woraus folgt

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \cdots$$

oder

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \cdots \qquad (1)$$

Ebenso leicht würde man finden

$$AB = \frac{3}{4}AB + \frac{3}{16}AB + \frac{3}{64}AB + \cdots$$

oder

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{4^4} + \cdots \qquad (2)$$

Zu diesen Summen einer unendlichen Menge von Theilen sind wir hier dadurch gekommen, dafs wir vorher eine endliche bestimmte Gröfse (die Einheit) in ihre Theile zerlegten und dann umgekehrt die gefundenen Theile wieder zusammensetzten. Aber es könnte wohl umgekehrt die Frage gestellt werden: welches ist die Summe einer gegebenen Reihe, etwa wie

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{5^4} + \cdots$$

die entweder eine endliche bestimmte Anzahl einzelner Glieder haben kann, oder vielleicht als unendliche vorausgesetzt wird. Hier würde uns der bisherige Weg wenig nützen, wenn man sich nicht aufs Probiren legen wollte, um durch eine glückliche Zerlegung einer passend gewählten Gröfse die Reihe erst zu erzeugen. — Um aber nicht bei so speziellen Fällen stehen zu bleiben, wollen wir diese Betrachtungen allgemeiner halten und uns dieselben durch eine geometrische Darstellung veranschaulichen.

Sei $\varphi(n)$ eine beliebige Funktion der ganzen Zahl $n$ und eine beliebige Anzahl ihrer Werthe nach der bisherigen Methode construirt, also in Fig. 24 für: $OA_1 = 1$, $A_1P_1 = \varphi(1)$, $OA_2 = 2$, $A_2P_2 = \varphi(2)$, u. s. f. $OA_n = n$, $A_nP_n = \varphi(n)$. Zieht man durch jeden der Punkte $P_1$, $P_2$, $P_3$ u. s. f. eine Gerade parallel der Grundlinie $OX$, so zerlegt man jede Senkrechte in eine Partie einzelner Stücke, z. B. $A_2P_2$

Digitized by Google

in 2, $A_2P_2$ in 3 u. s. f., endlich $A_nP_n$ in $n$ Theile. Setzen wir, um kurz bezeichnen zu können,

$$A_nQ_1 = u_1,\ Q_1Q_2 = u_2,\ Q_2Q_3 = u_3,\ \ldots\ Q_{n-1}P_n = u_n$$

so ist $A_nP_n$ gleich der Summe dieser Gröfsen, d. h.

$$\varphi(n) = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n. \qquad (3)$$

Ist nun die Natur der Funktion $\varphi$ bekannt, so kann man die Gröfsen $u_1$, $u_2, \ldots u_n$ selbst finden; denn es wird für $n = 1$, $\varphi(1) = u_1$, für $n = 2$, $\varphi(2) = u_1 + u_2$, mithin $u_2 = \varphi(2) - u_1$, d. h. $u_2 = \varphi(2) - \varphi(1)$; für $n = 3$, $\varphi(3) = u_1 + u_2 + u_3 = \varphi(2) + u_3$, mithin $u_3 = \varphi(3) - \varphi(2)$ u. s. f. Wäre z. B.

$$\varphi(n) = \frac{2^n - 1}{2^n}$$

so würde man erhalten

$$u_1 = \varphi(1) = \frac{1}{2},\ u_2 = \varphi(2) - \varphi(1) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$u_3 = \varphi(3) - \varphi(2) = \frac{7}{8} - \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$$

und wenn überhaupt $u_r$ eine beliebige unter den Gröfsen $u_1$, $u_2$, $\ldots$ $u_n$ bezeichnet,

$$u_r = \varphi(r) - \varphi(r-1) = \frac{2^r - 1}{2^r} - \frac{2^{r-1} - 1}{2^{r-1}} = \frac{2^r - 1}{2^r} - \frac{2(2^{r-1} - 1)}{2^r}$$

d. i.

$$u_r = \frac{1}{2^r}$$

folglich nach (3)

$$\frac{2^n - 1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n}. \qquad (4)$$

Dagegen liefse sich auch die Aufgabe umkehren und die Frage stellen, wie man die Natur der Funktion $\varphi(n)$ bestimmen könne, wenn die Gröfsen $u_1$, $u_2, \ldots u_n$ gegeben sind. Es versteht sich von selbst, dafs hier die Gröfsen $u_1, u_2, \ldots u_n$ nicht regellos beliebig angenommen werden dürfen, weil sonst die ganze Aufgabe den Charakter der gröfsten Unbestimmtheit an sich tragen würde, sondern dafs dieselben nach irgend einem Gesetze aus einander gebildet werden müssen, durch welches man in den Stand gesetzt wird, aus $u_1$ alle folgenden Gröfsen $u_2, u_3, \ldots u_n$ abzuleiten. Dieses Gesetz spricht sich z. B. in (4) darin aus, dafs jedes nächstfolgende Glied aus dem vorhergehenden durch Multiplikation des letzteren mit $\frac{1}{2}$ gebildet wird, dafs also ist:

Digitized by Google

$$u_2 = u_1 \cdot \frac{1}{2},\ u_3 = u_2 \cdot \frac{1}{2} = u_1 \cdot \frac{1}{2^2},\ u_4 = u_3 \cdot \frac{1}{2} = u_1 \cdot \frac{1}{2^3}$$

und überhaupt

$$u_r = u_1 \cdot \frac{1}{2^{r-1}}$$

oder weil $u_1$ selbst $= \frac{1}{2}$ ist,

$$u_r = \frac{1}{2^r}.$$

In so fern daher ein beliebiges Glied $u_r$ von seinem Index $r$ abhängt, kann man sagen: es mufs jedes Glied eine gewisse, der Form nach gegebene Funktion seines Stellenzeigers sein.

Man bemerkt leicht, dafs die Aufgabe, diejenige Funktion $\varphi(n)$ zu bestimmen, welche für jedes $n$ die Summe der Reihe

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n$$

darstellt, in welcher $u_1, u_2, \ldots u_n$ gewisse, nach einem bestimmten Gesetze aus einander gebildete Gröfsen sind, viel Ähnlichkeit mit der im vorigen Capitel behandelten besitzt. Bezeichnen wir nämlich die Senkrechten

$$A_1P_1 = u_1,\ A_2P_2 = u_1 + u_2,\ A_3P_3 = u_1 + u_2 + u_3,\ \ldots$$
$$A_nP_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$

der Reihe nach mit $y_1, y_2, y_3, \ldots y_n$, so haben wir auch hier die Natur einer Funktion aus speziellen Werthen derselben zu bestimmen; der Unterschied aber ist, dafs hier diese Werthe nicht unmittelbar und willkührlich gegeben sind, sondern dafs nur ihre Differenzen, welche nach einem zwar beliebigen, einmal angenommenen, aber auch consequent beibehaltenen Gesetze aus einander gebildet werden, als gegeben vorliegen. Auch ist hier die Aufgabe eine bestimmte, weil die gesuchte Funktion als Summe der Gröfsen

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n$$

auftritt und diese Reihe offenbar nur eine Summe hat.

Wäre es nun möglich, die Aufgabe, welche sich in der Gleichung

$$\varphi(n) = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n \qquad (5)$$

ausspricht, zu lösen, so wäre hiermit auch zugleich die Auflösung der Aufgabe, die Summe der ins Unendliche fortgesetzten Reihe

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 \ldots \text{ in inf.}$$

zu bestimmen, glücklich gefunden. Man brauchte nur in der Gleichung (5) die Gliederanzahl $n$ ins Unendliche wachsen zu lassen und die Gränze zu be-

Digitized by Google

stimmen, welcher sich $\varphi(n)$ für beständig wachsende $n$ nähert; man hätte dann unmittelbar

$$Lim\ \varphi(n) = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \dots \text{ in inf.} \qquad (6)$$

So wäre z. B. aus (4)

$$Lim\ \frac{2^n - 1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \dots \text{ in inf.}$$

und da

$$Lim\ \frac{2^n - 1}{2^n} = Lim\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 1$$

ist, so hat man

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \dots \text{ in inf.} \qquad (7)$$

wie schon früher gefunden wurde.

Wir wollen dieses Verfahren noch an einigen Beispielen erläutern, bevor wir in der allgemeinen Betrachtung der Reihen selbst fortfahren.

## §. 19.

### Summirung einiger endlichen und unendlichen Reihen.

I. Zu denjenigen endlichen Reihen, welche am leichtesten zu summiren sind, gehört die geometrische Progression. Sei $x$ der beliebige Exponent derselben, und

$$S_n = 1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} \qquad (1)$$

wobei $S_n$ die noch unbekannte Summe der $n$ Glieder auf der rechten Seite bezeichnet, so läfst sich dieselbe durch folgende kleine Rechnung finden. Man multiplizire beiderseits mit $x$, so wird

$$S_n x = x + x^2 + x^3 + \dots + x^n$$

und subtrahire diese Gleichung von der ersten, so bleibt:

$$(1 - x)\, S_n = 1 - x^n \qquad (2)$$

folglich

$$S_n = \frac{1 - x^n}{1 - x} \qquad (3)$$

mithin ist

$$\frac{1 - x^n}{1 - x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1}. \qquad (4)$$

Diefs gilt für jedes $x$; nur in einem Falle ist die ganze Rechnung als ungenügend anzusehen, nämlich wenn $x = +1$. Dann würde nämlich die Gleichung (2) in $0 S_n = 0$ übergehen und hiermit liefse sich nichts weiter

Digitized by Google

anfangen, weil durch beiderseitige Division mit 0 höchstens $\frac{0}{0} S_n = \frac{0}{0}$ zum Vorschein kommen würde, wobei man nicht berechtigt ist, den Coefficienten von $S_n$ für 1 anzusehen. Aber man findet in diesem Falle die Summe viel leichter, weil dann in der Gleichung (1) jedes Glied $= 1$ ist, folglich weil $n$ Glieder vorhanden sind,

$$S_n = n$$

sein mufs. Für negative $x$ ergiebt sich aus (4)

$$\frac{1 + (-1)^{n+1} x^n}{1 + x} = 1 - x + x^2 - \ldots + (-1)^{n-1} x^{n-1}. \quad (5)$$

Für $x = 1$ mufs man hier unterscheiden, ob die Gliederzahl $n$ gerade oder ungerade ist. Im ersten Falle erhält man 0, im zweiten 1 zur Summe, wie auch in der Reihe selbst.

Wollen wir nun die Reihe ins Unendliche fortgehen lassen, so haben wir die Gränze aufzusuchen, welcher sich der Ausdruck

$$\frac{1 - x^n}{1 - x} = \frac{1}{1 - x} - \frac{1}{1 - x} \cdot x^n$$

für wachsende $x$ nähert. Da hier $x$ seinen Werth während des Wachsthumes von $n$ nicht ändert, so reduzirt sich diese Untersuchung auf die Bestimmung von $Lim\ x^n$. Ist aber $x < 1$, so haben wir bekanntlich

$$Lim\ x^n = 0$$

dagegen für $x > 1$

$$Lim\ x^n = \infty$$

Es ist folglich auch für $x < 1$

$$Lim \frac{1 - x^n}{1 - x} = \frac{1}{1 - x}$$

und für $x > 1$

$$Lim \frac{1 - x^n}{1 - x} = \infty$$

Wir haben also, wenn wir in der Reihe (4) ebenfalls zur Gränze für wachsende $n$ übergehen,

$$\left.\begin{array}{c} \frac{1}{1 - x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots \text{ in inf.} \\ \text{für } x < 1 \end{array}\right\} \quad (6)$$

und

$$\left.\begin{array}{c} \infty = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots \text{ in inf.} \\ \text{für } x > 1 \end{array}\right\} \quad (7)$$

Wäre $x = 1$, so ist einfach $S_n = n$, mithin $Lim\ S_n = \infty$ und also

Digitized by Google

$$\infty = 1 + 1 + 1 + \ldots \text{ in inf.}$$

ein weiter nicht brauchbares Resultat.

Lassen wir ebenso in der Gleichung (5) $n$ ins Unendliche wachsen, so wird für $x < 1$,

$$\left.\begin{array}{c} \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots \text{ in inf.} \\ \text{für } x < 1 \end{array}\right\} \quad (8)$$

Wenn dagegen $x > 1$ ist, so nähert sich die Summe der Reihe gar keiner angebbaren Gränze. Denn es wird dann $x^n$ immer gröfser; da aber noch der Coeffizient $(-1)^{n+1}$ daran steht, so wechselt der Ausdruck $(-1)^{n+1} x^n$ auch beständig sein Zeichen; von einer Gröfse aber, deren absoluter Werth beständig wächst, die aber zugleich zwischen dem Positiven und Negativen hin und her schwankt, läfst sich gar kein Gränzwerth angeben. Die Reihe

$$\left.\begin{array}{c} 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \ldots \text{ in inf.} \\ x > 1 \end{array}\right\} \quad (9)$$

nähert sich also gar keiner angebbaren Gränze, oder mit anderen Worten, sie hat keine Summe. Wäre hier $x = 1$, so oszillirt die Reihe zwischen $+1$ und $-1$ hin und her und hat ebensowenig eine Summe*).

*) Über diese Reihen ist viel gestritten worden und namentlich in älteren Büchern sind in dieser Beziehung die sonderbarsten Dinge zu lesen. Euler behauptet, es sei allgemein für jedes $x$ die Gleichung (6) und ebenso (8) richtig, weil man durch fortwährende Division mit $1 - x$ in 1 auf die Reihe komme. Diefs haben Viele nachgeschrieben und sich gegen die Einwürfe, so gut es ging, zu vertheidigen gesucht. Die Einwürfe sind hauptsächlich folgende; da zugegeben wird, dafs

$$\infty = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \ldots \text{ in inf.}$$

sei, so ist für $x > 1$,

$$1 = 1,\ x > 1,\ x^2 > 1,\ x^3 > 1, \text{ u. s. f.}$$

folglich

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots \text{ in inf.} > 1 + 1 + 1 + 1 + \ldots \text{ in inf.}$$

mithin um so mehr die Reihe links $= \infty$. — Wenn aber $x > 1$ ist, so giebt die Reihe links einen negativen Quotienten, der unmöglich der Summe einer unendlichen Menge positiver Gröfsen gleich sein kann. Dieses seltsame Resultat erklärt der Übersetzer der Eulerschen Differenzialrechnung, Michelsen, höchst scharfsinnig dadurch, dafs er uns belehrt, negative Gröfsen seien solche, die gröfser als das Unendlichgrofse sind! Euler selbst sagt in der Differenzialrechnung, man müsse $\frac{1}{1-x}$ nicht als arithmetische Summe, sondern als diejenige Funktion von $x$ ansehen, durch deren Entwickelung jene Reihe entstehe und dieser Gedanke ist dann wieder von Fries in seiner mathematischen Naturphilosophie ausgeführt worden. Hier wird nun

Digitized by Google

II. Es sei die Summe der Reihe

$$\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \ldots + \cos nx$$

die wir mit $S_n$ bezeichnen wollen, aufzusuchen. Multiplizirt man bei-

---

dem ganz bestimmten Begriffe der arithmetischen Summe der ganz unbestimmte und fremdartige Begriff der analytischen Entwickelung untergeschoben, wodurch aber sehr harte Widersprüche entstehen. Denn wie eben gezeigt wurde, ist für $x > 1$ die Summe der Reihe $1 + x + x^2$ etc. $> 1 + 1 + 1$ etc., d. h. $1 + x + x^2 + \ldots = \infty$. Nun soll aber auch $1 + x + x^2 + \ldots = \frac{1}{1-x}$ sein, also folgt $\infty = \frac{1}{1-x}$, und da $x > 1$ ist, heifst diefs, eine ins Unendliche wachsende positive Gröfse soll einer bestimmten negativen Zahl gleich sein! Da ist denn kein anderes Herauskommen möglich, als dafs man sagt, jene analytische Beziehung darf nicht mit einem Gleichheitszeichen bezeichnet werden. Nähme man etwa das Ähnlichkeitszeichen, so wäre für $x > 1$ der Sinn der Gleichung

$$\frac{1}{1-x} \sim 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$$

der: durch Division mit $1 - x$ kann ich aus der Einheit Glieder von der auf der rechten Seite stehenden Reihe entwickeln. Man glaubte aber, wenn man nicht aufhöre zu dividiren, so käme die Reihe vollständig heraus, mithin sei sie gleich $\frac{1}{1-x}$. Hierauf ist die Antwort: bei der successiven Division giebt es successive Reste, die man nicht aufser Acht lassen darf. Für $x < 1$ werden diese Reste beständig kleiner und vermindern sich unter jede gegebene Gränze, wenn man nur weit genug geht; in diesem Falle kann man am Ende den Rest weglassen. Für $x > 1$ dagegen werden die Reste immer gröfser und können jede angebbare noch so grofse Zahl übersteigen, dürfen folglich nicht weggelassen werden. Um die Sache durch ein ganz handgreifliches Beispiel zu erläutern, denke man sich einen Brunnentrog, der einen Cubikfufs Wasser enthält und darüber die Brunnenröhre, welche die Eigenschaft hat, dafs, wenn aus dem Troge etwas geschöpft worden ist, sie die Hälfte des Ausgeschöpften wieder zusetzt. Man schöpfe nun den Cubikfufs aus, so fliefst ein halber Cubikfufs zu; man schöpfe diesen aus, so kommt $\frac{1}{4}$ Cubikfufs hinzu; nachdem dieser entfernt worden ist, fliefst wieder $\frac{1}{8}$ Cubikfufs zu u. s. f. Es bleibt jetzt offenbar immer weniger in dem Troge und man kann sagen: je länger geschöpft worden ist, desto genauer ist das, was ausgeschöpft wurde, gleich dem, was ursprünglich vorhanden war, plus dem, was während des Schöpfens noch zufloss, oder: nach unendlicher Zeit ist im Troge Nichts und das Ausgeschöpfte gleich dem ursprünglich vorhandenen Cubikfufse plus dem Zuflusse. Wäre aber die Sache so, dafs doppelt so viel zuflösse, als ausgeschöpft worden ist, so wären nach Entfernung des ersten Cubikfufses noch 2 Cubikfufs vorhanden; nachdem diese ausgeschöpft sind, noch 4 Cubikfufs u. s. f. Wenn nun Jemand sehr lange geschöpft hat, kann er dann sagen, das Ausgeschöpfte sei gleich dem ursprünglich vorhandenen Cubikfufse plus dem Zugeflossenen? Keineswegs, denn, was im Troge bleibt, ist der Unterschied zwischen beiden und dieser vermehrt sich beständig. Von Gleichheit also ist hier keine Rede.

Digitized by Google

derseits mit $2 \sin \frac{1}{2} x$ und zerlegt in der Reihe jedes doppelte Produkt nach der Formel $2 \cos a \sin b = \sin (a + b) - \sin (a - b)$, so ergiebt sich

$$\begin{aligned} 2 S \sin \tfrac{1}{2} x = & \sin \tfrac{3}{2} x - \sin \tfrac{1}{2} x \\ & + \sin \tfrac{5}{2} x - \sin \tfrac{3}{2} x \\ & + \sin \tfrac{7}{2} x - \sin \tfrac{5}{2} x \\ & \cdots\cdots\cdots \\ & + \sin \frac{2n+1}{2} x - \sin \frac{2n-1}{2} x \end{aligned}$$

---

Dieses Beispiel pafst geradezu auf unsere Reihen; im ersten Falle ist das Verhältnifs des Zuflusses zum Abgange wie $\frac{1}{2} : 1$ und $x = \frac{1}{2}$, d. h. $< 1$, hier wird der Rest, d. h. was im Troge bleibt, immer kleiner; im zweiten Falle ist jenes Verhältnifs $2 : 1$ und $x = 2$, d. h. $> 1$; hier wird der Rest immer gröfser und von Gleichheit zwischen der Reihe und dem früheren $\frac{1}{1-x}$ ist keine Spur vorhanden. Nicht weniger verkehrte Ansichten hat man über die Reihe (9) vorgebracht, welche namentlich für den Fall $x = 1$ in Anspruch genommen wurde. Da man nun einmal an die Allgemeingültigkeit der Reihen glaubte, so mufste auch für das wunderliche Resultat für $x = 1$

$$\frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots.$$

eine Erklärung gesucht werden. Diese ist folgende: für eine gerade Anzahl von Gliedern kommt 0, für eine ungerade 1 heraus; im Unendlichen aber giebt es weder Gerades noch Ungerades, es kann folglich weder 0 noch $+1$ herauskommen, sondern das arithmetische Mittel! Hier ist die Behauptung falsch, dafs das Unendliche weder gerade noch ungerade sei; denn wenn eine Zahl ins Unendliche wächst, so kann sie entweder immer eine gerade bleiben, oder eine ungerade, oder sie kann von dem Einen zum Anderen gehen, und in diesem Falle kann allerdings ein Unterschied sein, je nachdem die Funktion, in welcher man eine Zahl unendlich wachsen läfst, geformt ist. Um diefs deutlich zu machen, kann man folgende Betrachtung der obigen parallel führen. Wenn in dem Ausdrucke $\cos n\pi$ die Zahl $n$ ins Unendliche wächst, so kommt für gerade $n$ immer $+1$ und für ungerade $-1$ heraus. Da es nun im Unendlichen keine Gerade oder Ungerade giebt, so mufs $\cos n\pi$ für $n = \infty$ das arithmetische Mittel aus $+1$ und $-1$ geben, d. h. $\cos \infty \pi$ ist $= 0$. Dasselbe pafst ganz ähnlich auf den Sinus, so dafs man erhält $\sin \infty \pi = 0$; mithin auch $\cos^2 \infty \pi + \sin^2 \infty \pi = 0$!! Hier ist die Entscheidung ganz einfach; es ist für jedes noch so

Digitized by Google

wobei sich Alles bis auf das zweite Glied in der ersten und das erste Glied in der letzten Vertikalreihe hebt, so dafs blos bleibt

$$2\,S\,\sin\frac{1}{2}x = -\sin\frac{1}{2}x + \sin\frac{2n+1}{2}x$$

woraus folgt

$$S = -\frac{1}{2} + \frac{\sin\frac{2n+1}{2}x}{2\sin\frac{1}{2}x}$$

mithin

$$\left.\begin{aligned}\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \ldots + \cos nx \\ = -\frac{1}{2} + \frac{\sin\frac{2n+1}{2}x}{2\sin\frac{1}{2}x}\end{aligned}\right\} \quad (10)$$

womit die gesuchte Summe gefunden ist.

Setzt man $\pi - x$ an die Stelle von $x$, so erhält man nach leichten Umwandlungen

$$\left.\begin{aligned}\cos x - \cos 2x + \cos 3x - \ldots + (-1)^{n+1}\cos nx \\ = \frac{1}{2} + (-1)^{n+1}\frac{\cos\frac{2n+1}{2}x}{2\cos\frac{1}{2}x}\end{aligned}\right\} \quad (11)$$

Wollte man diese Reihen ins Unendliche fortsetzen, so müfste man die Gränze bestimmen, welcher sich die auf der rechten Seite stehenden Summen für unendlich wachsende $n$ nähern. Da aber $n$ blos in $\sin\frac{2n+1}{2}x$ und $\cos\frac{2n+1}{2}x$ vorkommt, so würde sich diese Aufgabe auf die Bestimmung von

$$Lim\,\sin\frac{2n+1}{2}x \text{ und } Lim\,\cos\frac{2n+1}{2}x$$

reduziren. Diese Gränzwerthe sind aber gar nicht angebbar, weil die Sinus und Cosinus eines ins Unendliche wachsenden Bogens beständig zwi-

---

grofse $n$, $\cos 2n\pi = +1$, $\cos(2n+1)\pi = -1$, was aber $\cos n\pi$ für wachsende $n$ giebt, läfst sich schlechthin nicht sagen, weil diese Funktion zwischen $+1$ und $-1$ hin und her oszillirt. Das Nämliche pafst auch auf die Reihe $1-1+1-1$ etc., die eben defswegen keine Summe hat.

Digitized by Google

schen $+1$ und $-1$ hin und her schwanken und keinem bestimmten Endwerthe zueilen.

III. Um die Summe der Reihe

$$S = \sin x + \sin 2x + \sin 3x + \ldots + \sin nx$$

zu finden, multiplizire man beiderseits mit $2 \sin \frac{1}{2} x$ und zerlege rechts jedes Produkt nach der Formel $2 \sin a \sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b)$, so wird

$$\begin{aligned} 2S \sin \tfrac{1}{2}x &= \cos \tfrac{1}{2}x - \cos \tfrac{3}{2}x \\ &+ \cos \tfrac{3}{2}x - \cos \tfrac{5}{2}x \\ &+ \cos \tfrac{5}{2}x - \cos \tfrac{7}{2}x \\ &\quad \ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ \cos \frac{2n-1}{2} x - \cos \frac{2n+1}{2} x \end{aligned}$$

mithin nach gegenseitiger Hebung

$$2S \sin \tfrac{1}{2}x = \cos \tfrac{1}{2}x - \cos \frac{2n+1}{2} x$$

oder

$$S = \tfrac{1}{2} \cot \tfrac{1}{2}x - \frac{\cos \frac{2n+1}{2} x}{2 \sin \frac{1}{2} x}$$

Folglich ist nun

$$\left.\begin{aligned} &\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \ldots + \sin nx \\ &= \tfrac{1}{2} \cot \tfrac{1}{2}x - \frac{\cos \frac{2n+1}{2} x}{2 \sin \frac{1}{2} x} \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

womit die gesuchte Summe gefunden ist.

Setzt man $\pi - x$ an die Stelle von $x$, so findet sich

$$\left.\begin{aligned} &\sin x - \sin 2x + \sin 3x - \ldots + (-1)^{n+1} \sin nx \\ &= \tfrac{1}{2} \tan \tfrac{1}{2}x + (-1)^{n+1} \frac{\sin \frac{2n+1}{2} x}{2 \cos \frac{1}{2} x} \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

Auch diese Reihen lassen sich nicht ins Unendliche fortsetzen, weil man

Digitized by Google

die Gränzen nicht bestimmen kann, welchen sich der Cosinus und Sinus des Bogens $\frac{2n+1}{2}x$ für wachsende $n$ nähern*).

## §. 20.

### Convergenz und Divergenz der Reihen.

Wir haben durch die Beispiele des vorigen Paragraphen zwei verschiedene Arten von Reihen kennen gelernt, einmal solche, in denen die Summe einer beliebigen Anzahl von Gliedern sich einer endlichen fest bestimmten Gränze nähert, je mehr die Anzahl jener Glieder vergröfsert wird, und solche, denen diese Eigenschaft ganz abgeht, bei welchen nämlich die Summe einer endlichen Partie von Gliedern entweder ins Unendliche zunahm, wenn sich die Gliederzahl vergröfserte, oder bei welchen diese Summe bald positiv, bald negativ ihrem absoluten Werthe nach zugleich immer gröfser wurde, oder in denen sie zwischen zwei bestimmten Gränzen hin und her schwankte. Sind diese Reihen sämmtlich ins Un-

---

*) Euler findet durch eine ähnliche Rechnung, bei der er keine Rücksicht auf das letzte, sich nicht hebende Glied nimmt,

$$\cos x - \cos 2x + \cos 3x - \ldots \text{ in inf.} = \frac{1}{2}$$

$$\sin x - \sin 2x + \sin 3x - \ldots \text{ in inf.} = \frac{1}{2}\tan\frac{1}{2}x$$

Vergleicht man dieſs mit den Formeln (11) und (13) für $n=\infty$, so erhält man, vorausgesetzt, daſs weder $\cos\frac{1}{2}x$ noch $\sin\frac{1}{2}x$ Null ist, die Gleichungen:

$$\cos\infty x = 0, \quad \sin\infty x = 0$$

woraus folgt

$$\cos^2\infty x + \sin^2\infty x = 0,$$

was geradezu Unsinn ist, weil die Gleichung $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$ für jeden noch so groſsen, d. h. auch für ins Unendliche wachsende Bogen gilt. Gleichwohl hat man in neuster Zeit die obigen Eulerschen Formeln wieder für richtig ausgegeben und sie dahin interpretirt, daſs man sagte, das Gleichheitszeichen bedeutet: durch eine gewisse analytische Operation lassen sich aus $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{2}\tan\frac{1}{2}x$ so viel Glieder jener Reihen entwickeln, als man will. Dann muſs man sich aber ein anderes Zeichen als das Gleichheits-, d. i. Identitätszeichen wählen, etwa das in der vorigen Anmerkung vorgeschlagene Ähnlichkeitszeichen, wenn man sich nicht den eben gezogenen unvermeidlichen Consequenzen aussetzen und nicht eine heillose Begriffsconfusion anrichten will. Dann würde man statt jener Gleichung erhalten $\cos^2\infty x + \sin^2\infty x \backsim 0$, und das kann Jeder so tiefsinnig deuten, als er Lust hat.

Digitized by Google

endliche fortgesetzt, so pflegt man die der ersten Art convergente, die der zweiten divergente zu nennen. Man kann daher sagen: eine unendliche Reihe convergirt, wenn die Summe einer endlichen Partie ihrer Glieder sich mehr und mehr einer bestimmten endlichen Gröfse als Gränze nähert, sobald jene Gliederanzahl ins Unendliche wächst, und diese bestimmte endliche Gröfse heifst die Summe der unendlichen Reihe; eine unendliche Reihe divergirt dagegen, wenn ihr die genannte Eigenschaft fehlt, wenn sie mithin keine Summe hat.

Es scheint hiernach leicht zu sein, die Convergenz oder Divergenz einer Reihe zu erkennen; man brauchte, um diefs für eine Reihe wie

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \ldots \text{ in inf.}$$

zu leisten, nur vorerst eine bestimmte Menge von Gliedern zu summiren, so dafs etwa

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n$$

wäre und nun $n$ ins Unendliche wachsen zu lassen; fände sich hierbei $Lim\ S_n$ gleich einer endlichen bestimmten Gröfse, so wäre die Reihe convergirend; hätte man dagegen $Lim\ S_n = \infty$, oder wäre $Lim\ S_n$ gar nicht angebbar, so divergirte die Reihe. Unglücklicherweise aber ist dieses Verfahren höchst selten ausführbar und es ist gewöhnlich leichter, gleich die Summe der ganzen unendlichen Reihe, als die einer beliebigen Gliederanzahl aus derselben aufzufinden. Soll diefs aber möglich sein, so mufs man schon im voraus wissen, ob die gesuchte Summe überhaupt existirt, weil es sonst geschehen könnte, dafs man viel Mühe verwendete, um etwas aufzufinden, was gar nicht gefunden werden kann, oder mit anderen Worten, es handelt sich um Criterien der Convergenz oder Divergenz einer unendlichen Reihe. Bevor wir also an die Summirung unendlicher Reihen selbst gehen, müssen wir Kennzeichen zu entdecken suchen, durch welche sich gleich im voraus beurtheilen läfst, ob die Summirung selbst möglich sei oder nicht, d. i. ob die Reihe convergire oder divergire.

Eines dieser Kennzeichen ist nun sehr leicht zu bemerken; es besteht darin, dafs in der Reihe

$$u_1, u_2, u_3, u_4, \ldots$$

jedes Glied gröfser als das nächstfolgende ist, nämlich

$$u_1 > u_2 > u_3 > u_4 > u_5 \ldots$$

dafs also die Gröfsen $u_1, u_2, u_3, \ldots$, wie man zu sagen pflegt, eine fallende Reihe bilden. Wäre nämlich umgekehrt die Reihe eine stei-

Digitized by Google

gende, d. h. $u_1 < u_2 < u_3 \ldots$ und alle ihre Glieder positiv, so wäre die Summe der ganzen Reihe $>$ als die der Reihe $u_1 + u_1 + u_1 + \ldots$ *in inf.*, folglich unendlich, oder die Reihe divergent. Man kann dieſs sehr gut an einer geometrischen Darstellung sehen. Ist nämlich

$$\varphi(n) = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n$$

und in Fig. 25 $OA_n = n$, $A_nP_n = \varphi(n)$, so können zwei verschiedene Fälle vorkommen, entweder nämlich nähert sich die Curve bei wachsenden $n$ fortwährend einer bestimmten, in gewisser Entfernung der Linie $OX$ parallel laufenden Geraden, oder nicht. Der erste Fall entspricht dem Falle, in welchem die Reihe

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots \text{ in inf.}$$

convergirt, der zweite dem, in welchem sie divergirt. Soll aber $\varphi(n)$ sich für wachsende $n$ einer bestimmten Gränze nähern, so muſs die Differenz $\varphi(n+1) - \varphi(n)$, d. h. das Stück $Q_nP_{n+1}$ immer kleiner werden, d. h. es muſs die Reihe eine fallende sein.

Überhaupt lassen sich die verschiedenen Arten von Reihen auf folgende Weise geometrisch darstellen:

I. Reihen, deren Glieder gleich sind. Für diese hat man die Formen

$$u + u + u + u + \ldots \text{ in inf.}$$

oder

$$u - u + u - u + \ldots \text{ in inf.}$$

Für die erste gilt Fig. 26, für die zweite Fig. 27. In beiden findet keine Annäherung an eine bestimmte zu $OX$ parallel laufende Gerade statt; die Reihen divergiren also.

II. Reihen, deren Glieder wachsen, d. i. steigende Reihen. Je nachdem die Glieder gleiche, oder wechselnde Zeichen haben, sind hier die Formen:

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \ldots$$
$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots$$

Die erste entspricht der Fig. 28, die zweite der Fig. 29. Beide Reihen sind divergente, weil sich die Curve keiner bestimmten zu $OX$ parallelen Geraden nähert.

III. Reihen, deren Glieder abnehmen, d. i. fallende Reihen. Hier stehen wieder die Formen:

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \ldots$$
$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots$$



Digitized by Google

Hier kann eine Annäherung an eine bestimmte der $OX$ parallelen Geraden statt finden, wie man aus den Figg. 30 und 31 sehen kann. Solche Reihen können also convergiren, ob sie aber defshalb schon convergiren müssen, ist eine andere Frage. In der That findet sich bei näherer Betrachtung, dafs das Fallen einer unendlichen Reihe zu ihrer Convergenz zwar nothwendig, aber nicht hinreichend sei. Das Erste haben wir so eben gesehen, das Zweite erkennt man leicht aus einzelnen Beispielen. Die Reihe z. E.

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \cdots \text{ in inf.}$$

ist zwar eine fallende, aber gleichwohl eine divergirende; denn man hat offenbar

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}$$
$$> \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}$$

oder

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{n}{\sqrt{n}}, \text{ d. i. } > \sqrt{n}$$

Lassen wir nun $n$ ins Unendliche wachsen, so wird $\sqrt{n}$ gröfser als jede angebbare Zahl; diefs mufs nun um so mehr mit der Summe der Reihe selbst der Fall sein, woraus folgt, dafs dieselbe, ins Unendliche verlängert, divergirt. Das nämliche Verhalten findet bei der folgenden ebenfalls fallenden Reihe statt:

$$\frac{1}{\log 2} + \frac{1}{\log 3} + \frac{1}{\log 4} + \cdots + \frac{1}{\log (n+1)} + \cdots \text{ in inf.}$$

Hier ist offenbar wieder:

$$\frac{1}{\log 2} + \frac{1}{\log 3} + \frac{1}{\log 4} + \cdots + \frac{1}{\log (n+1)}$$
$$> \frac{1}{\log (n+1)} + \frac{1}{\log (n+1)} + \frac{1}{\log (n+1)} + \cdots + \frac{1}{\log (n+1)}$$

d. h.

$$> \frac{n}{\log (n+1)} \text{ oder } > \frac{n+1}{\log (n+1)} \cdot \frac{n}{n+1}.$$

Nun ist aber, wenn $a$ die Basis der Logarithmen bezeichnet,

$$n+1 = a^{\log (n+1)}$$

folglich

Digitized by Google

$$\frac{n+1}{log\,(n+1)} \cdot \frac{n}{n+1} = \frac{a^{log\,(n+1)}}{log\,(n+1)} \cdot \frac{n}{n+1}$$

Setzen wir $log\,(n+1) = x$, so ist $x$ eine Zahl, welche ins Unendliche wächst, wenn dieſs mit $n$ der Fall ist. Wir haben also für wachsende $n$ und zugleich wachsende $x$,

$$Lim\ \frac{n+1}{log\,(n+1)} \cdot \frac{n}{n+1} = Lim\ \frac{a^x}{x} \cdot \frac{n}{n+1}$$

Es wird nun $Lim\ \frac{n}{n+1} = 1$ und $Lim\ \frac{a^x}{x} = \infty$ (nach §. 9), folglich übersteigt der Ausdruck

$$\frac{n+1}{log\,(n+1)} \cdot \frac{n}{n+1}$$

bei wachsenden $n$ jede gegebene noch so groſse Zahl und folglich wächst auch die Summe der Reihe

$$\frac{1}{log\,2} + \frac{1}{log\,3} + \frac{1}{log\,4} + \ldots \text{ in inf.}$$

ins Unendliche, je mehr Glieder man vereinigt, d. h. die Reihe divergirt.

Erscheinungen dieser Art, deren Zahl sich leicht bedeutend vermehren lieſse, weisen darauf hin, daſs auſser dem Fallen einer Reihe noch andere Bedingungen erfüllt sein müssen, wenn von der Summirung einer Reihe die Rede sein soll. Wir haben daher zunächst zu untersuchen, welche weiteren Eigenschaften zur Convergenz einer Reihe nöthig sind. Wir wollen in dieser Untersuchung, welche wir jetzt vornehmen wollen, hauptsächlich zwei Fälle unterscheiden, ob nämlich die vorgegebene Reihe aus blos positiven Gliedern besteht, oder ob in ihr ein Zeichenwechsel statt findet. In beiden Fällen jedoch wird immer vorausgesetzt, daſs die absoluten Werthe der Reihenglieder, nämlich der Gröſsen

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4,\ \ldots$$

eine fallende Reihe bilden, oder daſs jedes Glied gröſser als das darauf folgende ist.

## §. 21.

### Beurtheilung der Convergenz mittelst der Restbetrachtung.

Sei $S$ die Summe der als convergent vorausgesetzten Reihe

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \ldots \text{ in inf.} \qquad (1)$$

und $S_n$ die Summe ihrer $n$ ersten Glieder, also

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n$$



Digitized by Google

so ist offenbar

$$S - S_n = u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \ldots \text{ in inf.}$$

d. h. die Gröfsen $u_{n+1}$, $u_{n+2}$, etc. bilden wieder eine convergente Reihe, deren Summe $S - S_n$ ist. Bezeichnen wir diese Summe

$$u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \ldots$$

mit $R_n$, so wird

$$S - S_n = R_n \text{ oder } S = S_n + R_n$$

Hier ist $R_n$ diejenige Gröfse, welche man gewöhnlich den Rest einer unendlichen Reihe zu nennen pflegt, nämlich das, was man zur Summe einer endlichen Gliederanzahl zusetzen mufs, um die Summe der ganzen unendlichen Reihe zu bekommen. Da nun für wachsende $n$ die Summe $S_n$ der Gröfse $S$ als Gränze, folglich die Differenz $S - S_n$, welcher $R_n$ gleich war, sich der Null nähert, so ist folglich für eine convergente Reihe

$$Lim\ R_n = 0.$$

Ebenso kann man auch umgekehrt sicher sein, dafs eine Reihe convergirt, wenn die Bedingung

$$Lim\ [u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \ldots + \text{in inf.}] = 0$$

erfüllt ist.

Wäre dagegen die Reihe

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \ldots$$

eine divergirende, so würde auch

$$u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \ldots$$

eine solche sein, also diese Gröfse, welche hier die Stelle des $R_n$ vertritt, für wachsende $n$ sich nicht nothwendig der Null nähern. Und ebenso kann man daraus, dafs die obige Gröfse sich nicht der Null nähert, auf die Divergenz der Reihe

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \ldots \text{ in inf.}$$

schliefsen.

Für den ersten Augenblick möchte es scheinen, als sei die Anwendung dieses Kennzeichens der Convergenz oder Divergenz nicht besonders bequem, weil man es wieder mit einer unendlichen Reihe, dem Reste, zu thun bekommt. Man kann sich aber dadurch helfen, dafs man zeigt, die Summe der Reihe

$$u_{n+1}, u_{n+2}, u_{n+3}, \ldots$$

sei kleiner, als die Summe einer anderweit bekannten Reihe und positiv; nähert sich nun die letztere für wachsende $n$ der Null, so mufs diefs mit der ersten um so mehr der Fall sein.

Digitized by Google

Es sei z. B. die Reihe

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2\,.\,3}+\frac{1}{2\,.\,3\,.\,4}+\frac{1}{2\,.\,3\,.\,4\,.\,5}+\ldots \textit{ in inf.}$$

auf ihre Convergenz zu untersuchen. Schreibt man für die hier stehenden Glieder $u_1, u_2, \ldots$ u. s. f., so ist

$$u_{n+1}+u_{n+2}+u_{n+3}+\ldots$$

$$=\frac{1}{2\,.\,3\,.\ldots.\,(n+2)}+\frac{1}{2\,.\,3\,.\ldots.\,(n+3)}+\frac{1}{2\,.\,3\,.\ldots.\,(n+4)}+\cdots$$

$$=\frac{1}{2\,.\,3\,.\ldots.\,(n+2)}\left\{1+\frac{1}{n+3}+\frac{1}{(n+3)\,(n+4)}+\cdots\right\}$$

$$\text{d. i.}<\frac{1}{2\,.\,3\,.\ldots.\,(n+2)}\left\{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}+\cdots\right\}$$

oder wenn man die eingeklammerte Reihe nach der Formel (6) §. 19 für $x=\frac{1}{n}$ summirt, wobei die Bedingung $x<1$ erfüllt ist,

$$u_{n+1}+u_{n+2}+u_{n+3}+\ldots \textit{ in inf.}$$

$$<\frac{1}{2\,.\,3\,.\ldots.\,(n+2)}\cdot\frac{1}{n-1}.$$

Da nun jene Summe $u_{n+1}+u_{n+2}+$ etc. offenbar positiv ist und für wachsende $n$ der Ausdruck

$$\frac{1}{2\,.\,3\,.\ldots.\,(n+2)}\cdot\frac{1}{n-1}$$

sich unbegränzt der Null nähert, so ist für unseren Fall

$$Lim\,[u_{n+1}+u_{n+2}+u_{n+3}+\ldots]=0$$

folglich die Reihe

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2\,.\,3}+\frac{1}{2\,.\,3\,.\,4}+\frac{1}{2\,.\,3\,.\,4\,.\,5}+\cdots$$

eine convergente. Durch wirkliche numerische Berechnung findet man die Summe derselben

$$=0{,}718281828\ldots$$

Es ist leicht zu sehen, dafs diese Zahl eine irrationale sein müsse, weil sie kleiner als die Einheit, aber keinem rationalen Bruche $\frac{p}{q}$ gleich sein kann. Dafs dieselbe $<1$ sein müsse, erhellt aus der einfachen Bemerkung:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2\,.\,3}+\frac{1}{2\,.\,3\,.\,4}+\frac{1}{2\,.\,3\,.\,4\,.\,5}+\cdots$$

$$<\frac{1}{2}+\frac{1}{2\,.\,2}+\frac{1}{2\,.\,2\,.\,2}+\frac{1}{2\,.\,2\,.\,2\,.\,2}+\ldots$$

Digitized by Google

d. i.

$$< \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - 1 \text{ oder } < 1.$$

Wäre aber

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{2.3.4.5} + \ldots = \frac{p}{q}$$

wo $\frac{p}{q}$ einen rationalen ächten Bruch bedeutet, dessen Zähler und Nenner ganze positive Zahlen sind, so multiplizire man beiderseits mit $1.2.3.\ldots.q$, dann wird

$$3.4.5\ldots.q + 4.5\ldots.q + 5.6\ldots q + \ldots + 1$$
$$+ \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \frac{1}{(q+1)(q+2)(q+3)} + \ldots \text{ in inf.}$$
$$= 2.3.4\ldots.(q-1)p$$

oder für

$$3.4.5\ldots.q + 4.5\ldots.q + 5\ldots.q + \ldots + 1 = M$$
$$2.3.4\ldots.(q-1)p = N$$

wo nun $M$ und $N$ ganze positive Zahlen sind,

$$M + \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \ldots \text{ in inf.} = N.$$

Die Summe der Reihe

$$\frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \frac{1}{(q+1)(q+2)(q+3)} + \ldots$$

ist aber kleiner als die der Reihe

$$\frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)^2} + \frac{1}{(q+1)^3} + \ldots$$

d. h.

$$< \frac{1}{1-\frac{1}{q+1}} - 1 \text{ oder } < \frac{1}{q}$$

mithin ein ächter Bruch, weil $q > 1$ sein muſs. Es sollte also die Summe einer positiven ganzen Zahl $M$ und eines ächten Bruches einer positiven ganzen Zahl $N$ gleich sein. Da dieſs nun unmöglich ist, so folgt, daſs die Summe der Reihe

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \ldots$$

eine irrationale Gröfse sein muſs.

Digitized by Google

Diese um 2 vermehrte Summe, also die Zahl 2,71828182..., welche nun ebenfalls eine irrationale Gröfse ist, hat man aus Gründen, die sich im Verlaufe der ferneren Untersuchungen ergeben werden, auch zur Basis eines logarithmischen Systems genommen, welches man das natürliche nennt. Die Zahl 2,7182818... wird hier kurz mit $e$ bezeichnet, wobei sich der Buchstabe $e$ ein ähnliches Eigenthumsrecht in der Analysis erworben hat, wie der Buchstabe $\pi$, als Stellvertreter der Ludolphschen Zahl in der Geometrie. Die Logarithmen dieses Systems heifsen natürliche oder hyperbolische und werden entweder mit *log. nat.*, oder kürzer mit einem blosen $l$ bezeichnet, wobei man die Angabe der Basis wegläfst.

## §. 22.

### Vergleichung verschiedener Reihen mit der geometrischen Progression.

Obgleich das im vorigen Paragraphen angegebene Criterium für die Convergenz der Reihen ganz allgemein gültig ist, so wird man doch nicht viel damit ausrichten, weil die Anwendung desselben oft mit mannichfachen Weitläufigkeiten und Schwierigkeiten verknüpft ist. Um nun andere, bequemere Kennzeichen zu erlangen, halten wir uns an ein ganz einfaches Prinzip, welches in folgendem unmittelbar klarem Satze besteht: wenn die einzelnen Glieder der Reihe

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \cdots$$

kleiner als die entsprechenden Glieder der Reihe

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots$$

sind und man schon weifs, dafs die letztere convergirt, so convergirt auch die erste; sind dagegen die Glieder der Reihe

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \cdots$$

gröfser als die entsprechenden Glieder der Reihe

$$b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + \cdots$$

von der man weifs, dafs sie divergirt, so divergirt auch jene Reihe.

Um dieses Prinzip anwenden zu können, müssen wir uns zuvörderst nach einer Reihe umsehen, von welcher wir die Bedingungen der Convergenz und Divergenz bereits kennen. Eine solche stellt sich uns in der geometrischen Progression

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots$$

dar, von welcher wir wissen, dafs sie für $x < 1$ convergirt, in jedem

Digitized by Google

anderen Falle aber divergirt. Diese Reihe wird der Anhaltepunkt für eine weitere, sehr wichtige Untersuchung.

Wollen wir nun die Reihe

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$$

mit der geometrischen Progression vergleichen, so müfste sein für den Fall der Convergenz

$$\left.\begin{array}{l} u_0 < 1,\ u_1 < x,\ u_2 < x^2,\ u_3 < x^3,\ \ldots \\ \text{oder} \\ u_0 < 1,\ u_1 < x,\ (u_2)^{\frac{1}{2}} < x,\ (u_3)^{\frac{1}{3}} < x,\ \ldots \end{array}\right\} \text{für } x < 1$$

d. h. überhaupt für jede ganze positive Zahl $n$

$$(u_n)^{\frac{1}{n}} < x, \text{ für } x < 1$$

und für den Fall der Divergenz

$$\left.\begin{array}{l} u_0 > 1,\ u_1 > x,\ u_2 > x^2,\ u_3 > x^3,\ \ldots \\ \text{oder} \\ u_0 > 1,\ u_1 > x,\ (u_2)^{\frac{1}{2}} > x,\ (u_3)^{\frac{1}{3}} > x,\ \ldots \end{array}\right\} \text{für } x > 1$$

d. i. überhaupt

$$(u_n)^{\frac{1}{n}} > x, \text{ für } x > 1.$$

Diefs läfst sich noch in etwas anderer Form aussprechen. Sei nämlich $k$ die Gränze, welcher sich der Ausdruck $(u_n)^{\frac{1}{n}}$ bei wachsenden $n$ nähert, so wird sich immer eine Zahl $n$ dergestalt finden lassen, dafs $(u_n)^{\frac{1}{n}}$ um weniger als eine gegebene kleine Gröfse von $k$ differirt. Ist also $\delta$ eine solche Gröfse, so giebt es immer eine Zahl $n$ dergestalt, dafs der absolute Werth der Differenz

$$(u_n)^{\frac{1}{n}} - k < \delta \text{ oder } (u_n)^{\frac{1}{n}} < k + \delta$$

ist. Da nun $(u_{n+1})^{\frac{1}{n+1}}$ näher an $k$ liegt, als $(u_n)^{\frac{1}{n}}$, so ist offenbar um so mehr

$$(u_{n+1})^{\frac{1}{n+1}} < k + \delta,\ (u_{n+2})^{\frac{1}{n+2}} < k + \delta \text{ u. s. f.}$$

Diefs sieht man auch geometrisch leicht ein, wenn man für den Augenblick

$$(u_n)^{\frac{1}{n}} = \varphi(n)$$

setzt und diese Funktion construirt. Da hier $Lim\ \varphi(n) = k$ ist, so nähert sich die Curve in Fig. 32 mehr und mehr einer in der Entfernung $k$ zu $OX$ parallelen Geraden. Es wird sich also ein Werth $ON = n$ finden lassen, für welchen $NP = \varphi(n)$ kleiner ist und bei wachsenden $n$ kleiner

Digitized by Google

bleibt als eine gewisse Senkrechte $k+\delta$, wo $\delta$ eine beliebig kleine Gröfse bezeichnet.

Aus den obigen Gleichungen folgt nun

$$u_n < (k+\delta)^n,\ u_{n+1} < (k+\delta)^{n+1},\ u_{n+2} < (k+\delta)^{n+2} \text{ u. s. f.}$$

Ist aber $k < 1$, so wird man die beliebig kleine Gröfse $\delta$ immer so klein nehmen können, dafs auch $k+\delta$, welches kurz mit $x$ bezeichnet werden möge, kleiner als 1 bleibt, wie man auch durch Betrachtung der Figur augenblicklich bemerkt. Dann ist

$$u_n < x^n,\ u_{n+1} < x^{n+1},\ u_{n+2} < x^{n+2} \text{ u. s. f.}$$
$$\text{und zugleich } x < 1.$$

Wir haben folglich

$$\left.\begin{aligned} & u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \dots \\ & < x^n + x^{n+1} + x^{n+2} + \dots \end{aligned}\right\} \text{ für } x < 1$$

d. i. $$< x^n (1 + x + x^2 + \dots .)$$

oder

$$< \frac{x^n}{1-x}.$$

Daraus folgt nun

$$Lim\ (u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \dots) = Lim\ \frac{x^n}{1-x} = 0$$

folglich convergirt die Reihe

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \dots$$

nach dem Satze des vorigen Paragraphen, weil ihr Rest sich der Null nähert.

So wie aber der absolute Werth der Differenz $(u_n)^{\frac{1}{n}} - k$ kleiner gemacht werden kann, als jede angebbare Gröfse, so gilt dieſs offenbar auch von dem absoluten Werthe der Differenz $k - (u_n)^{\frac{1}{n}}$. Es ist also

$$k - (u_n)^{\frac{1}{n}} < \delta,\ \text{mithin } (u_n)^{\frac{1}{n}} > k - \delta$$

oder

$$u_n > (k-\delta)^n$$

und ebenso um so mehr

$$u_{n+1} > (k-\delta)^{n+1},\ u_{n+2} > (k-\delta)^{n+2} \text{ u. s. f.}$$

Ist aber $k > 1$, so kann man die beliebig kleine Gröfse $\delta$ auch so klein nehmen, dafs $k-\delta$, welches kurz $x$ heifsen möge, immer noch $> 1$ bleibt, wie man auch aus der Figur 33 sogleich ersieht. Es ist dann

$$u_n > x^n,\ u_{n+1} > x^{n+1},\ u_{n+2} > x^{n+2},\ \dots$$
$$\text{und zugleich } x > 1$$

Digitized by Google

folglich auch

$$\left.\begin{matrix} u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots \\ > x^n + x^{n+1} + x^{n+2} + \cdots \end{matrix}\right\} \text{ für } x > 1$$

d. i.

$$> \frac{x^n}{1-x}$$

mithin

$$Lim\ (u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots) = Lim \frac{x^n}{1-x} = \infty$$

also divergirt in diesem Falle die Reihe

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$$

Wir haben daher folgendes Theorem:

Bezeichnet $k$ die Gränze, welcher sich der Ausdruck $(u_n)^{\frac{1}{n}}$ für wachsende $n$ nähert, so convergirt die Reihe

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$$

wenn $k < 1$, und divergirt, wenn $k > 1$ ist.

Dieses Theorem läfst sich noch unter anderer Form aussprechen. Nach §. 8, II. ist nämlich für wachsende $n$

$$Lim\ [f(n)]^{\frac{1}{n}} = Lim \frac{f(n+1)}{f(n)}.$$

Da nun der Werth des allgemeinen Gliedes $u_n$ der obigen Reihe durch seine Stellung in derselben bestimmt wird, so können wir es als Funktion des Stellenzeigers $n$ ansehen und dann ist für $f(n) = u_n$

$$k = Lim\ (u_n)^{\frac{1}{n}} = Lim \frac{u_{n+1}}{u_n}$$

mithin heifst jetzt der obige Satz:

Bezeichnet $k$ die Gränze, welcher sich der Ausdruck $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ für wachsende $n$ nähert, so convergirt die Reihe

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$$

wenn $k < 1$, und divergirt, wenn $k > 1$ ist.

Einige Anwendungen dieses Theoremes sind folgende:

I. Für die Reihe

$$1 + \frac{\alpha}{1} + \frac{\alpha^2}{1.2} + \frac{\alpha^3}{1.2.3} + \cdots$$

hat man

$$Lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = Lim \frac{a}{n+1} = 0$$

also ist die Reihe immer convergent, was auch $a$ sein möge.

Digitized by Google

II. Um die Reihe

$$a + \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{3}a^3 + \frac{1}{4}a^4 + \ldots$$

mit der allgemeinen zu vergleichen, nehme man

$$u_0 = 0,\ u_1 = a,\ u_2 = \frac{1}{2}a^2 \text{ u. s. f.}$$

so ist

$$Lim\,\frac{u_{n+1}}{u_n} = Lim\,\frac{na}{n+1} = Lim\,\frac{a}{1+\frac{1}{n}} = a$$

also $k = a$. Für $a < 1$ convergirt also die Reihe, für $a > 1$ divergirt sie.

III. Vergleicht man auf ähnliche Weise die Reihe

$$a + 2a^2 + 3a^3 + 4a^4 + \ldots$$

mit der allgemein betrachteten, so ist

$$Lim\,\frac{u_{n+1}}{u_n} = Lim\,\frac{(n+1)a}{n} = Lim\left(1+\frac{1}{n}\right)a = a$$

also convergirt sie für $a < 1$ und divergirt für $a > 1$.

IV. Für die Reihe

$$1 + 1.a + 1.2.a^2 + 1.2.3.a^3 + \ldots$$

ist

$$Lim\,\frac{u_{n+1}}{u_n} = Lim\,(n+1)a = \infty$$

für jeden Werth von $a$, *excl.* $a = 0$. Die Reihe divergirt also immer, was auch $a$ sein möge; denn für $a = 0$ reduzirt sie sich auf ihr erstes Glied und dann ist überhaupt gar keine Reihe vorhanden. Vergleicht man sie mit der in I. betrachteten, so sieht man, dafs die Eigenschaft derselben in Absicht auf ihre Convergenz das Umgekehrte von den Eigenschaften jener ist, so wie auch die Coeffizienten der Potenzen von $a$ in ihr die Umkehrungen von jenen Coeffizienten sind.

## §. 23.

### Weitere Betrachtungen über die Convergenz und Divergenz der Reihen.

So leicht und bequem auch die Anwendung des im vorigen Paragraphen bewiesenen Theoremes ist und so sichere Entscheidungen dasselbe in den Fällen $k < 1$ und $k > 1$ liefert, so läfst es doch noch etwas zu wünschen übrig, nämlich die Bestimmung der Convergenz oder Divergenz für den Fall, dafs $k = 1$ wäre. Dann kann überhaupt die ganze Beweisführung nicht stattfinden, welche sich darauf stützt, dafs man zwischen $k$

Digitized by Google

und 1, also entweder unter oder über $k$ noch eine Zahl $x$ annehmen kann, welche einmal $= k + \delta$, das andere Mal $= k - \delta$ war. In diesem Ausnahmsfalle $k = 1$ kann man sich nun meistentheils durch folgende Betrachtungen helfen.

Da wir alle Glieder der Reihe

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$$

als positiv und als successive abnehmend voraussetzen, so ist offenbar

$$\begin{aligned} u_0 &= u_0 \\ 2u_1 &= 2u_1 \\ 4u_3 &< 2u_2 + 2u_3 \\ 8u_7 &< 2u_4 + 2u_5 + 2u_6 + 2u_7 \end{aligned}$$

u. s. f.

folglich

$$\begin{aligned} &u_0 + 2u_1 + 4u_3 + 8u_7 + 16u_{15} + \cdots \\ &< 2(u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \cdots) - u_0 \end{aligned}$$

Ist nun die Reihe

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$$

eine convergente, so ist ihre Summe $S$ eine endliche bestimmte Gröfse, mithin

$$\begin{aligned} &u_0 + 2u_1 + 4u_3 + 8u_7 + 16u_{15} + \cdots \\ &< 2S - u_0. \end{aligned}$$

also die Summe $T$ der Reihe

$$u_0 + 2u_1 + 4u_3 + 8u_7 + 16u_{15} + \cdots$$

offenbar auch eine endliche bestimmte Gröfse, d. h. die Reihe convergirt. Ebenso kann man umgekehrt sagen, die Reihe

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$$

divergirt, sobald diefs mit der aus ihr abgeleiteten der Fall ist, weil daraus folgt $2S - u_0 > T$ oder $S > \frac{1}{2}u_0 + \frac{1}{2}T$, folglich $S$ unendlich, wenn $T$ unendlich ist.

Ferner haben wir:

$$\begin{aligned} u_0 &= u_0 \\ 2u_1 &> u_1 + u_2 \\ 4u_3 &> u_3 + u_4 + u_5 + u_6 \\ 8u_7 &> u_7 + u_8 + u_9 + u_{10} + u_{11} + u_{12} + u_{13} + u_{14} \end{aligned}$$

u. s. f.

mithin

Digitized by Google

$$u_0 + 2u_1 + 4u_3 + 8u_7 + 16u_{15} + \cdots$$
$$> u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \cdots$$

d. h. die Reihe $u_0 + 2u_1 + 4u_3$ etc. divergirt, wenn die gegebene Reihe $u_0 + u_1 + u_2$ etc. divergirt, und umgekehrt, die Reihe $u_0 + u_1 + u_2 +$ etc. convergirt, wenn die aus ihr abgeleitete convergirt.

Fassen wir die vier gewonnenen Sätze zusammen, so folgt das Theorem:

Die beiden Reihen:

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \cdots$$

und

$$u_0 + 2u_1 + 4u_3 + 8u_7 + 16u_{15} + \cdots$$

sind zugleich convergent und divergent.

Um also die erste auf ihre Convergenz oder Divergenz zu untersuchen, braucht man dieſs blos mit der zweiten zu thun. Die Bedingungen für die zweite sind zugleich die für die erste.

Eine sehr bemerkenswerthe Anwendung hiervon ist folgende. Man setze

$$u_0 = \frac{1}{1^\mu},\ u_1 = \frac{1}{2^\mu},\ u_2 = \frac{1}{3^\mu},\ \text{u. s. f.}$$

so haben wir die Reihen

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$$
$$= \frac{1}{1^\mu} + \frac{1}{2^\mu} + \frac{1}{3^\mu} + \frac{1}{4^\mu} + \cdots$$

und

$$u_0 + 2u_1 + 4u_3 + 8u_7 + 16u_{15} + \cdots$$
$$= 1 + 2^{1-\mu} + 4^{1-\mu} + 8^{1-\mu} + 16^{1-\mu} + \cdots$$

Schreibt man die letztere unter der Form

$$1 + 2^{1-\mu} + (2^{1-\mu})^2 + (2^{1-\mu})^3 + \cdots$$

so erkennt man in ihr eine geometrische Progression. Es ist also zu ihrer Convergenz derselben nöthig, dafs

$$2^{1-\mu} = \frac{2^1}{2^\mu} < 1,\ \text{d. h. } \mu > 1$$

sei. Für $\mu \leqq 1$ dagegen divergirt sie. Die nämlichen Bedingungen gelten nun unmittelbar für die ursprüngliche Reihe. Also ist die Reihe

$$\frac{1}{1^\mu} + \frac{1}{2^\mu} + \frac{1}{3^\mu} + \frac{1}{4^\mu} + \cdots$$

Digitized by Google

convergent für $\mu > 1$ und divergent für $\mu \leqq 1$. Hieraus erkennt man z. B., dafs von den Reihen

$$\frac{1}{\sqrt{1^3}} + \frac{1}{\sqrt{2^3}} + \frac{1}{\sqrt{3^3}} + \frac{1}{\sqrt{4^3}} + \cdots$$

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots$$

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

die beiden ersten convergiren, die beiden letzten dagegen divergiren.

## §. 24.

### Anderweite Reihenvergleichungen.

I. Die soeben gefundenen Resultate, welche die Convergenz oder Divergenz der Reihe

$$\frac{1}{1^\mu} + \frac{1}{2^\mu} + \frac{1}{3^\mu} + \cdots + \frac{1}{n^\mu} + \cdots \qquad (1)$$

vollkommen genau beurtheilen lassen, können nun selbst wieder als Anhaltepunkte für weitere Reihenvergleichungen benutzt werden. Halten wir nämlich die Reihe

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots \qquad (2)$$

mit der obigen zusammen, so können wir sagen, dafs die letztere convergirt, wenn

$$u_1 < \frac{1}{1^\mu},\ u_2 < \frac{1}{2^\mu},\ u_3 < \frac{1}{3^\mu},\ \cdots$$

$$\text{überhaupt}\quad u_n < \frac{1}{n^\mu}$$

und zugleich $\mu > 1$ ist. Hieraus folgt nun noch

$$\frac{1}{u_n} > n^\mu$$

und wenn man beiderseits die Logarithmen nimmt,

$$log\left(\frac{1}{u_n}\right) > \mu\ log\ n$$

$$\text{folglich}\quad \frac{log\left(\frac{1}{u_n}\right)}{log\ n} > \mu,\ \mu > 1.$$

Digitized by Google

Hat also eine Reihe die Eigenschaft, dafs der Quotient $\frac{log\left(\frac{1}{u_n}\right)}{log\ n}$ gröfser als die Einheit ist und bleibt, wie grofs auch $n$ werden möge, so convergirt die Reihe, deren allgemeines Glied $u_n$ ist.

Ebenso folgt aus

$$u_n > \frac{1}{n^\mu}$$

$$\frac{1}{u_n} < n^\mu$$

und

$$\frac{log\left(\frac{1}{u_n}\right)}{log\ n} < \mu$$

Ist nun hier $\mu$, folglich auch der Quotient $\frac{log\left(\frac{1}{u_n}\right)}{log\ n}$ kleiner als die Einheit, so divergirt die Reihe, deren allgemeines Glied durch $u_n$ dargestellt wird. — Diefs können wir zusammen so aussprechen:

Bezeichnet $k$ die Gränze, welcher sich der Quotient

$$\frac{log\left(\frac{1}{u_n}\right)}{log\ n}$$

für wachsende $n$ nähert, so convergirt die Reihe

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \cdots$$

wenn $k > 1$, und divergirt, wenn $k < 1$ ist.

Um diefs z. B. auf die Reihe

$$\frac{a}{1+a} + \frac{a^2}{1+a^2} + \frac{a^3}{1+a^3} + \cdots \qquad (3)$$

anzuwenden, ist

$$\frac{1}{u_n} = \frac{1+a^n}{a^n} = \frac{1}{a^n} + 1$$

$$\frac{log\left(\frac{1}{u_n}\right)}{log\ n} = \frac{log\left(\frac{1}{a^n}+1\right)}{log\ n}$$

Ist hier $a \geqq 1$, so nähert sich der Quotient rechts beständig der Null; folglich divergirt in diesem Falle die Reihe (3). Ist dagegen $a < 1$, so setze man $a = \frac{1}{b}$, wo nun $b > 1$ ist, so wird

Digitized by Google

$$\frac{1}{a^n} + 1 = b^n + 1 = b^n \left(1 + \frac{1}{b^n}\right)$$

folglich

$$\frac{log\left(\frac{1}{u_n}\right)}{log\ n} = \frac{n}{log\ n} b + \frac{log\left(1 + \frac{1}{b^n}\right)}{log\ n}$$

woraus man unter Anwendung des Theoremes II. §. 8 für $log\ n = x$ erhält

$$Lim \frac{log\left(\frac{1}{u_n}\right)}{log\ n} = \infty$$

folglich convergirt die obige Reihe (3) für $a < 1$.

II. Zu einer anderen Reihenvergleichung führen folgende Betrachtungen.

Es sei die Summe der Reihe

$$\left.\begin{aligned} 1 + \frac{a_0 - b_0}{b_0} + \frac{a_1 - b_1}{b_1} \cdot \frac{a_0}{b_0} + \frac{b_2 - b_2}{b_2} \cdot \frac{a_0 a_1}{b_0 b_1} + \cdots \\ \cdots + \frac{a_n - b_n}{b_n} \cdot \frac{a_0 a_1 a_2 \cdots a_{n-1}}{b_0 b_1 b_2 \cdots b_{n-1}} \end{aligned}\right\} (4)$$

aufzusuchen, in welcher $a_0$, $a_1$, $a_2 \ldots a_n$, $b_0$, $b_1$, $b_2 \ldots b_n$ ganz beliebige Gröfsen bedeuten. Führt man die hier angedeuteten Divisionen und Multiplikationen wirklich aus, so erhält man

$$\begin{aligned} 1 + \left(\frac{a_0}{b_0} - 1\right) + \left(\frac{a_0 a_1}{b_0 b_1} - \frac{a_0}{b_0}\right) + \left(\frac{a_0 a_1 a_2}{b_0 b_1 b_2} - \frac{a_0 a_1}{b_0 b_1}\right) + \cdots \\ \cdots + \left(\frac{a_0 a_1 a_2 \cdots a_n}{b_0 b_1 b_2 \cdots b_n} - \frac{a_0 a_1 a_2 \cdots a_{n-1}}{b_0 b_1 b_2 \cdots b_{n-1}}\right) \end{aligned}$$

wobei jedesmal diejenigen zwei Glieder in eine Parenthese eingeschlossen worden sind, welche aus einem Gliede der zu summirenden Reihe hervorgehen. Es hebt sich hier Alles bis auf das erste Glied der letzten Parenthese, und so ist nun die Summe gefunden, nämlich

$$\left.\begin{aligned} = \frac{a_0 a_1 a_2 \cdots a_n}{b_0 b_1 b_2 \cdots b_n} \\ = 1 + \frac{a_0 - b_0}{b_0} + \frac{a_1 - b_1}{b_1} \cdot \frac{a_0}{b_0} + \frac{a_2 - b_2}{b_2} \cdot \frac{a_0 a_1}{b_0 b_1} + \cdots \\ \cdots + \frac{a_n - b_n}{b_n} \cdot \frac{a_0 a_1 a_2 \cdots a_{n-1}}{b_0 b_1 b_2 \cdots b_{n-1}} \end{aligned}\right\} (5)$$

Diese rein identische Gleichung kann einerseits zur Verwandelung von endlichen oder unendlichen Produkten in Reihen benutzt werden, läfst aber andererseits auch eine Anwendung auf die Convergenzbestimmung

Digitized by Google

mancher Reihen zu. Für das Letztere ist besonders folgende Substitution von Wichtigkeit:

$$a_0 = \alpha,\ a_1 = \alpha + \gamma,\ a_2 = \alpha + 2\gamma,\ \ldots\ a_n = \alpha + n\gamma$$
$$b_0 = \beta,\ b_1 = \beta + \gamma,\ b_2 = \beta + 2\gamma,\ \ldots\ b_n = \beta + n\gamma$$

Man erhält durch sie

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\alpha(\alpha+\gamma)(\alpha+2\gamma)\ldots(\alpha+n\gamma)}{\beta(\beta+\gamma)(\beta+2\gamma)\ldots(\beta+n\gamma)} \\ &= 1 + \frac{\alpha-\beta}{\beta} + \frac{\alpha-\beta}{\beta+\gamma}\cdot\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\alpha-\beta}{\beta+2\gamma}\cdot\frac{\alpha(\alpha+\gamma)}{\beta(\beta+\gamma)} + \ldots \\ &\ldots + \frac{\alpha-\beta}{\beta+n\gamma}\cdot\frac{\alpha(\alpha+\gamma)\ldots(\alpha+\overline{n-1}\gamma)}{\beta(\beta+\gamma)\ldots(\beta+\overline{n-1}\gamma)} \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Da diese Gleichung eine blose Identität darstellt, so mufs sie gelten, wie grofs auch die Zahl $n$ sein mag. Links stehen $n+1$ Faktoren, rechts $n+2$ Glieder; lassen wir also $n$ ins Unendliche wachsen, so wird die Reihe eine unendliche. Diese wird convergiren oder divergiren, je nachdem der Werth des Produktes links sich einer endlichen Gränze nähert oder nicht. Ohne nun zu untersuchen, in welchen Fällen diefs im Allgemeinen statt findet, können wir leicht bemerken, dafs diefs immer geschehen wird, wenn $\beta > \alpha$ ist. Dann ist nämlich $\frac{\alpha}{\beta}$ ein ächter Bruch, ebenso sind $\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\gamma}$, $\frac{\alpha+2\gamma}{\beta+2\gamma}$ u. s. f. sämmtlich ächte Brüche, die sich zugleich fortwährend der Einheit nähern. Es ist nun

$$\frac{\alpha(\alpha+\gamma)}{\beta(\beta+\gamma)} < \frac{\alpha}{\beta}$$
$$\frac{\alpha(\alpha+\gamma)(\alpha+2\gamma)}{\beta(\beta+\gamma)(\beta+2\gamma)} < \frac{\alpha(\alpha+\gamma)}{\beta(\beta+\gamma)}$$
u. s. f.

Je mehr Faktoren man also von dem Produkte

$$\frac{\alpha(\alpha+\gamma)(\alpha+2\gamma)\ldots(\alpha+n\gamma)}{\beta(\beta+\gamma)(\beta+2\gamma)\ldots(\beta+n\gamma)}$$

nimmt, desto kleiner wird dasselbe*). Indessen beträgt die Verminde-

*) Man darf hieraus nicht etwa schliefsen wollen, dafs dieses Produkt sich unbegränzt der Null nähere. So z. B. ist das Produkt

$$\frac{a^2-a}{a^2-1}\cdot\frac{a^3-a}{a^3-1}\cdot\frac{a^4-a}{a^4-1}\cdot\ldots\cdot\frac{a^{n+1}-a}{a^{n+1}-1}$$

worin $a$ eine positive ganze Zahl bedeutet, ein Produkt von lauter ächten Brüchen. Dasselbe läfst sich aber auch so schreiben:



Digitized by Google

rung immer weniger, weil jeder nächstfolgende ächte Bruch näher an der Einheit liegt, als der vorhergehende. Der Gränzwerth des ganzen unendlichen Produktes kann daher nur eine endliche Gröfse sein. Wir können noch bemerken, dafs dieselbe auch eine bestimmte sein müsse, d. h. dafs jenes Produkt sich einer festen Gränze nähert und nicht etwa bei wachsender Faktorenzahl zwischen zwei Gränzen hin und her schwankt, wie die Gröfse *sin x* bei wachsenden $x$ zwischen $+1$ und $-1$. Denn jenes Produkt stellt immer die Summe der Reihe auf der rechten Seite dar und diese Summe kann nur eine sein, auch wenn die Reihe ins Unendliche verlängert gedacht wird. Nehmen wir also:

$$Lim \frac{\alpha(\alpha+\gamma)\ldots(\alpha+n\gamma)}{\beta(\beta+\gamma)\ldots(\beta+n\gamma)} = P$$

so wird noch

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\beta} + \frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{1}{\beta+\gamma} + \frac{\alpha(\alpha+\gamma)}{\beta(\beta+\gamma)}\cdot\frac{1}{\beta+2\gamma} + \frac{\alpha(\alpha+\gamma)(\alpha+2\gamma)}{\beta(\beta+\gamma)(\beta+2\gamma)}\cdot\frac{1}{\beta+3\gamma} + \ldots \\ = \frac{1-P}{\beta-\alpha} \end{aligned}\right\} (7)$$

folglich auch diese Reihe convergent für $\beta > \alpha$.

Setzen wir noch $\alpha+\gamma$ für $\alpha$, so folgt unter der Bedingung $\beta > \alpha + \gamma$ durch Multiplikation mit $\alpha$:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\alpha(\alpha+\gamma)}{\beta(\beta+\gamma)} + \frac{\alpha(\alpha+\gamma)(\alpha+2\gamma)}{\beta(\beta+\gamma)(\beta+2\gamma)} + \ldots \\ = \frac{\alpha(1-P)}{\beta-\alpha-\gamma} \end{aligned}\right\} (8)$$

folglich ist die Reihe convergent für $\beta > \alpha+\gamma$.

Man kann aus dieser Gleichung selbst wieder den Werth von $P$ bestimmen. Wäre nämlich $P$ eine endliche Gröfse, so müfste wegen der Ungleichungen für $\beta > \alpha$,

$$(a-1)\,a\cdot\frac{a^2-a}{a^2-1}\cdot\frac{a^3-a}{a^3-1}\cdot\ldots\cdot\frac{a^{n+1}-a}{a^n-1}\cdot\frac{1}{a^{n+1}-1} = \frac{(a-1)\,a^n}{a^{n+1}-1}$$

$$= \frac{a-1}{a-\frac{1}{a^n}}$$

Dieſs nähert sich aber für wachsende $n$ der Gränze $\frac{a-1}{a}$. So findet man z. B. hiernach für $a=2$

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{3}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{14}{15}\cdot\frac{30}{31}\cdot\frac{62}{63}\cdot\ldots\ldots \text{ in inf.}$$

d. h. das Produkt nähert sich durch fortwährende Abnahme der Gränze $\frac{1}{2}$.

Digitized by Google

$$\frac{\alpha}{\beta} > \frac{\alpha(\alpha+\gamma)(\alpha+2\gamma)\cdots}{\beta(\beta+\gamma)(\beta+2\gamma)\cdots} \text{ d. i. } > P$$

$$\frac{\alpha(\alpha+\gamma)}{\beta(\beta+\gamma)} > \frac{\alpha(\alpha+\gamma)(\alpha+2\gamma)\cdots}{\beta(\beta+\gamma)(\beta+2\gamma)\cdots} \text{ d. i. } > P$$

u. s. f.

auch sein

$$\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\alpha(\alpha+\gamma)}{\beta(\beta+\gamma)} + \frac{\alpha(\alpha+\gamma)(\alpha+2\gamma)}{\beta(\beta+\gamma)(\beta+2\gamma)} + \cdots > P + P + P + P + \cdots.$$

Wie klein nun auch $P$ sein möchte, so würde es doch, hinreichend vielmal genommen, jede angebbare Zahl übersteigen können, es müfste also die Summe der Reihe links ebenfalls gröfser als jede angebbare Zahl werden, was der Gleichung (8) widerspricht. Es ist mithin $P = 0$ oder für $\beta > \alpha$,

$$Lim \frac{\alpha(\alpha+\gamma)(\alpha+2\gamma)\cdots(\alpha+n\gamma)}{\beta(\beta+\gamma)(\beta+2\gamma)\cdots(\beta+n\gamma)} = 0. \qquad (9)$$

Durch Einführung des Werthes $P = 0$ verwandeln sich nun die Gleichungen (7) und (8) in die folgenden:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{\beta} + \frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{1}{\beta+\gamma} + \frac{\alpha(\alpha+\gamma)}{\beta(\beta+\gamma)}\cdot\frac{1}{\beta+2\gamma} + \frac{\alpha(\alpha+\gamma)(\alpha+2\gamma)}{\beta(\beta+\gamma)(\beta+2\gamma)}\cdot\frac{1}{\beta+3\gamma} + \cdots \\ &\qquad = \frac{1}{\beta-\alpha}, \text{ (für } \beta > \alpha). \end{aligned}\right\} (10)$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\alpha(\alpha+\gamma)}{\beta(\beta+\gamma)} + \frac{\alpha(\alpha+\gamma)(\alpha+2\gamma)}{\beta(\beta+\gamma)(\beta+2\gamma)} + \cdots \\ &\qquad = \frac{\alpha}{\beta-\alpha-\gamma}, \text{ (für } \beta > \alpha+\gamma). \end{aligned}\right\} (11)$$

womit zugleich ein Paar sehr einfache Reihensummen gewonnen sind.

So erkennt man z. B. aus der Gleichung (7), dafs die Reihe

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1\cdot3}{2\cdot4}\cdot\frac{1}{6} + \frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\cdot\frac{1}{8} + \cdots \qquad (12)$$

eine convergente ist. Daher convergirt auch die folgende, weil ihre Summe offenbar das Doppelte von der Summe der vorhergehenden Reihe (12) ist,

$$1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1\cdot3}{2\cdot4}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\cdot\frac{1}{4} + \cdots \qquad (13)$$

Das Nämliche gilt offenbar auch von der Reihe



Digitized by Google

$$1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{5}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1}{7}+\cdots \qquad (14)$$

da ihre Glieder einzeln kleiner sind, als die der Reihe (13).

Ebenso überzeugt man sich mittelst der Formel (7) leicht, dafs die Reihe

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{5}+\frac{2.4}{3.5}\cdot\frac{1}{7}+\frac{2.4.6}{3.5.7}\cdot\frac{1}{9}+\cdots \qquad (15)$$

convergirt. Diefs mufs also noch mehr mit der folgenden der Fall sein:

$$\frac{1}{4}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{6}+\frac{2.4}{3.5}\cdot\frac{1}{8}+\frac{2.4.6}{3.5.7}\cdot\frac{1}{10}+\cdots \qquad (16)$$

deren Glieder kleiner sind als die entsprechenden der Reihe (15). Es folgt hieraus, dafs auch die Reihe, welche das Doppelte von (16) darstellt, nämlich

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{2.4}{3.5}\cdot\frac{1}{4}+\frac{2.4.6}{3.5.7}\cdot\frac{1}{5}+\cdots \qquad (17)$$

convergiren müsse. Daraus erkennt man ferner noch die Convergenz der Reihe

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}+\frac{2.4}{3.5}\cdot\frac{1}{6}+\frac{2.4.6}{3.5.7}\cdot\frac{1}{8}+\cdots \qquad (18)$$

deren Glieder kleiner sind, als die entsprechenden Glieder der Reihe (14).

## §. 25.

### Reihen mit wechselnden Gliedern.

Die Aufgabe über die Entscheidung der Convergenz oder Divergenz solcher Reihen, in denen nicht alle Glieder positiv sind, kommt im Allgemeinen auf die schon behandelte Aufgabe zurück. Denn man übersieht gleich, dafs eine Reihe mit Gliedern von verschiedenen Vorzeichen convergiren müsse, sobald diejenige convergirt, welche man dadurch aus ihr bildet, dafs man von allen Gliedern die numerischen Werthe behält und diese sämmtlich mit gleichen Zeichen zusammensetzt. So wird z. B. die Reihe

$$u_0+u_1-u_2-u_3+u_4+u_5-\cdots$$

in welcher die Glieder paarweis positiv und negativ sind, und worin die Gröfsen $u_0$, $u_1$, $u_2$ etc. selbst als positiv angenommen werden, offenbar eine convergirende sein, wenn die folgende

$$u_0+u_1+u_2+u_3+u_4+u_5+\cdots$$

convergirt, und ebenso in jedem anderen Falle.

Digitized by Google

Haben je zwei auf einander folgende Glieder entgegengesetzte Zeichen, ist also die Reihe von der Form:

$$u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + u_4 - \cdots \qquad (1)$$

und ist sie zugleich eine fallende, also $u_0 > u_1 > u_2$ etc., endlich $Lim\,(u_n) = 0$, so kann man leicht einsehen, dafs dieselbe überhaupt convergirt. Sie läfst sich nämlich auf zwei verschiedene Weisen schreiben, die sich gestalten wie folgt

$$u_0 - (u_1 - u_2) - (u_3 - u_4) - \cdots \qquad (2)$$

$$u_0 - u_1 + (u_2 - u_3) + (u_4 - u_5) + \cdots \qquad (3)$$

Da nun der Voraussetzung nach $u_0 > u_1 > u_2 > u_3$ etc., so sind die Differenzen

$$u_1 - u_2,\ u_3 - u_4,\ u_5 - u_6,\ \cdots$$

$$u_2 - u_3,\ u_4 - u_5,\ u_6 - u_7,\ \cdots$$

sämmtlich positiv und es folgt durch Vergleichung von (1) mit (2) und (3)

$$\left.\begin{array}{c} u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + u_4 - \cdots \\ < u_0 \text{ und } > u_0 - u_1 \end{array}\right\} \qquad (4)$$

Die Summe der fraglichen Reihe liegt also zwischen zwei endlichen Gränzen, mithin ist die Reihe selbst convergent.

Dieses Kennzeichen für die Convergenz der Reihen mit wechselnden Gliedern greift weiter, als das zuerst erwähnte. Durch das erste würde man z. B. über die Convergenz der Reihe

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots \qquad (5)$$

nicht ins Klare kommen, weil die Reihe, welche entsteht, wenn alle Glieder positiv genommen werden, nämlich

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots$$

divergirt; dagegen belehrt uns das zweite Theorem, dafs die Reihe (5) convergirt und dafs die Summe derselben zwischen 1 und $\frac{1}{2}$ liegt. Ebenso leicht überzeugt man sich von der Convergenz der Reihen

$$\frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots$$

$$\frac{1}{log\ 2} - \frac{1}{log\ 3} + \frac{1}{log\ 4} - \frac{1}{log\ 5} + \cdots$$

die, ebenfalls mit gleichen Zeichen genommen, divergirend werden*).

*) In älteren Werken findet man vielerlei über die Verwandelung divergirender

Als Beispiel für die Anwendung der sämmtlichen Convergenzregeln wollen wir die Reihe

$$1 + \frac{\mu}{1} x + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2} x^2 + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1.2.3} x^3 + \dots \quad (6)$$

in welcher $\mu$ und $x$ beliebige Gröfsen bedeuten, auf ihre Convergenz oder Divergenz untersuchen.

Bedeutet $\mu$ eine ganze positive Zahl, so mufs sich unter den Zahlen 1, 2, 3 etc., welche successive im Nenner abgezogen werden, auch einmal eine finden, welche dem $\mu$ gleich ist. Das Glied, in welchem diefs vorkommt, hat dann den Faktor $\mu - \mu = 0$, verschwindet also und das Nämliche geschieht mit allen folgenden Gliedern. Die Reihe (6) wird mithin für den Fall eines positiven ganzen $\mu$ eine unendliche, kann also dann auch nur eine endliche Summe haben.

Ist aber $\mu$ keine ganze positive Zahl, so bricht die Reihe nirgends ab, wird also eine unendliche und macht nun eine Untersuchung ihrer Convergenz nöthig. Hierbei benutzen wir zuerst das Theorem in §. 21, für dessen Anwendung in unserem Falle

$$u_n = \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\dots(\mu-\overline{n-1})}{1.2.3\dots n} x^n$$

$$u_{n+1} = \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\dots(\mu-\overline{n-1})(\mu-n)}{1.2.3\dots n(n+1)} x^{n+1}$$

ist. Es ergiebt sich hieraus

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\mu-n}{n+1} x = \left(\frac{\mu}{n+1} - \frac{n}{n+1}\right) x$$

mithin

$$Lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = -x \text{ *)}$$

also das $k$ in jenem Theoreme $= -x$. Soll nun der absolute Werth von

---

Reihen in convergirende, wodurch man die Summen der divergirenden Reihen auffinden wollte. Diese Transformationen zeigen aber niemals, was sie sollen. Es wird die divergente Reihe nicht in eine andere, mit ihr identische und convergente umgeformt, denn das ist geradezu unmöglich, sondern man leitet aus der divergenten eine andere, von ihr ganz verschiedene Reihe ab, die nun recht wohl convergiren kann. Es ist diefs eine historisch sehr merkwürdige Täuschung, die sich aber in jedem noch so elegant aussehenden Falle leicht vernichten läfst.

*) Dafs hier der Quotient negativ wird, zeigt, dafs von einer Stelle an ein Zeichenwechsel in der fraglichen Reihe eintritt, wie auch in den folgenden Betrachtungen bemerkt wird.

Digitized by Google

$t$ kleiner als die Einheit bleiben, so mufs diefs mit dem absoluten Werthe von $x$ der Fall sein, d. h. es mufs $x$ zwischen den Gränzen $+1$ und $-1$ liegen, was man durch $+1 > x > -1$ bezeichnen kann. Ist dagegen der absolute Werth von $x$ gröfser als die Einheit, so divergirt die Reihe (6) ganz sicher. Wir haben nun noch den Fall zu betrachten, in welchem $x$ absolut genommen $= 1$ ist. Diefs giebt folgende Betrachtungen:

1) Es sei $x = +1$, so wird für positive $\mu$ die Reihe (6) der folgenden gleich

$$1 + \frac{\mu}{1} + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2} + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1.2.3} + \cdots \quad (7)$$

Da nun $\mu$ hier nicht ganz ist, so wird es im Allgemeinen aus einer ganzen Zahl und einem Bruche bestehen, wird also zwischen zwei auf einander folgenden Zahlen $p-1$ und $p$ liegen, so dafs $\mu - \overline{p-1}$ noch positiv ist, dagegen $\mu - p$ und $\mu - \overline{p+1}$ etc. negativ sind. Die obige Reihe ist dann offenbar

$$= 1 + \frac{\mu}{1} + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2} + \cdots + \frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-\overline{p-1})}{1.2\ldots p}$$
$$- \frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-\overline{p-1})(p-\mu)}{1.2.p(p+1)}$$
$$+ \frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-\overline{p-1})(p-\mu)(p-\mu+1)}{1.2\ldots p(p+1)(p+2)} - \cdots$$

so dafs von einer gewissen Stelle an ein Wechsel der Zeichen eintritt. Bezeichnen wir nun die jedenfalls endliche Summe der $p$ ersten Glieder mit $S_p$, so ist diese Reihe

$$= S_p + \frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-\overline{p-1})}{1.2\ldots p}\left[1 - \frac{p-\mu}{p+1} + \frac{(p-\mu)(p-\mu+1)}{(p+1)(p+2)} - \cdots\right] \quad (8)$$

Die in Parenthesen stehende Reihe convergirt nun jedenfalls; denn wenn man in Formel (8) $\alpha = p-\mu$, $\beta = p+1$, $\gamma = 1$ setzt und bemerkt, dafs die Bedingung $\beta > \alpha + \gamma$ hier immer erfüllt ist, so bemerkt man, dafs die Reihe

$$\frac{p-\mu}{p+1} + \frac{(p-\mu)(p-\mu+1)}{(p+1)(p+2)} + \frac{(p-\mu)(p-\mu+1)(p-\mu+2)}{(p+1)(p+2)(p+3)} + \cdots$$

eine convergente ist. Es mufs also um so mehr die Reihe

$$\frac{p-\mu}{p+1} - \frac{(p-\mu)(p-\mu+1)}{(p+1)(p+2)} + \frac{(p-\mu)(p-\mu+1)(p-\mu+2)}{(p+1)(p+2)(p+3)} - \cdots$$

folglich auch die in (8) eingeklammerte Reihe convergiren.

Digitized by Google

Der ganze mit (8) bezeichnete Ausdruck ist demnach eine endliche Gröfse, d. h. die Reihe (7) convergirt für jedes positive $\mu$.

Wäre aber in (7) $\mu$ negativ, so hätte man statt dessen

$$1 - \frac{\mu}{1} + \frac{\mu(\mu+1)}{1.2} - \frac{\mu(\mu+1)(\mu+2)}{1.2.3} + \ldots \quad (9)$$

und diese Reihe kann nur convergiren, wenn $\mu < 1$ ist, weil für $\mu = 1$ alle Glieder einander gleich und für $\mu > 1$ die Glieder immer gröfser werden. Ihre Convergenz folgt in jenem Falle aus §. 24 und S. 116.

Die Reihe (7) convergirt also für alle positiven $\mu$ und für solche negative, welche $< 1$ sind, was man kurz mit $+\infty > \mu > -1$ bezeichnet.

2) Für $x = -1$ geht die Reihe (6) in die folgende über

$$1 - \frac{\mu}{1} + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2} - \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1.2.3} + \ldots \quad (10)$$

Ist nun wieder $\mu$ positiv und zwischen $p-1$ und $p$ gelegen, so ist die Reihe

$$= 1 - \frac{\mu}{1} + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2} - \ldots \pm \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-\overline{p-1})}{1.2.3\ldots p}$$
$$\pm \frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-\overline{p-1})(p-\mu)}{1.2\ldots p(p+1)}$$
$$\pm \frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-\overline{p-1})(p-\mu)(p-\mu+1)}{1.2\ldots p(p+1)(p+2)} \pm \ldots$$

oder wenn die jedenfalls endliche Summe der $p$ ersten Glieder mit $S_p$ bezeichnet wird,

$$= S_p \pm \frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-\overline{p-1})}{1.2\ldots p}\left[1 + \frac{p-\mu}{p+1} + \frac{(p-\mu)(p-\mu+2)}{(p+1)(p+2)} + \ldots\right]$$

Die eingeklammerte Reihe convergirt aber nach §. 24, 8, wenn $p+1 > p-\mu+1$ ist, was hier immer statt findet. Die Reihe (10) convergirt also für jedes positive $\mu$.

Ist aber $\mu$ negativ, so hat man statt der Reihe (10) die folgende, in der $\mu$ positiv ist,

$$1 + \frac{\mu}{1} + \frac{\mu(\mu+1)}{1.2} + \frac{\mu(\mu+1)(\mu+2)}{1.2.3} + \ldots$$

Ihre Convergenz kann nur dann statt finden, wenn die Glieder kleiner werden, was einzig und allein für gebrochene $\mu$ statt findet. Allein auch dann convergirt sie nicht; denn setzt man in §. 24, 8 $\alpha = \mu$, $\beta = 1$,

Digitized by Google

$\gamma = 1$, so müfste $\beta > \alpha$, d. h. $1 > \mu + 1$ sein, was nicht möglich ist, weil $\mu$ hier als positiv angesehen wird.

Die Reihe (10) convergirt also blos für jedes positive $\mu$. Fassen wir das Bisherige zusammen, so können wir sagen:

Die Reihe

$$1 + \frac{\mu}{1}x + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2}x^2 + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1.2.3}x^3 + \cdots$$

welche unter der Voraussetzung eines nicht ganzen und positiven $\mu$ ins Unendliche fortläuft, convergirt für jedes $\mu$, wenn $+1 > x > -1$ ist; für $x = +1$ aber mufs $+\infty > \mu > -1$ und für $x = -1$, $+\infty > \mu > 0$ sein.

## §. 26.

### Die Rechnungen mit unendlichen Reihen.

Wir haben früher angedeutet, dafs es eines der wichtigsten Geschäfte der Analysis sei, unendliche Reihen zu summiren; diese Aufgabe kann natürlich nur dadurch gelöst werden, dafs man mit den fraglichen Reihen verschiedene Rechnungsoperationen vornimmt, wobei auch der Fall eintreten kann, dafs man unendliche Reihen zu addiren oder zu multipliziren, oder sonstige Hülfsmittel des Calcüls auf sie anzuwenden hat. Bevor wir aber derartige Untersuchungen vornehmen, haben wir die Frage zu beantworten, mit welchem Rechte man solche Rechnungsoperationen mit unendlichen Reihen vornimmt und wie weit die Befugnifs dazu reicht. Diese Frage ist defshalb nothwendig, weil uns die Arithmetik blos mit endlichen bestimmten Gröfsen oder Polynomen von endlicher Gliederanzahl rechnen gelehrt hat, hier aber Ausdrücke, welche ins Unendliche fortlaufen, dem Calcül unterworfen werden sollen, und wollten wir jene Frage unbeantwortet lassen, so träfe die Analysis der Vorwurf einer ganz willkührlichen Ausdehnung rein arithmetischer Rechnungsoperationen, die vielleicht in manchen Fällen zu höchst widersinnigen Resultaten führen könnte*).

Über die Befugnifs nun, mit unendlichen Reihen nach den Regeln der Arithmetik zu rechnen, haben wir Folgendes zu bemerken. Alle bisherigen Rechnungen beschäftigten sich mit Gleichungen und selbst da, wo

*) Und in der That auch dazu geführt hat, wollen wir noch hinzusetzen. Das bisher in Deutschland übliche höchst unkritische Verfahren hat die an und für sich so einfache Lehre von den Reihen zu einem wirklich entsetzlichen Grade der Verworrenheit gebracht.

Digitized by Google

Ungleichheiten eingeführt wurden, geschah dieſs nur zur Ausmittelung von Gränzwerthen, welche sich zuletzt doch wieder in Gleichungen aussprachen. Wir können aber auch im voraus sehen, daſs wir in der Analysis niemals mit etwas Anderem zu thun haben werden, wenn wir uns nicht auf ganz unbestimmte Beziehungen der Gröſsen unter einander einlassen wollen. Wir suchen nämlich den organischen Zusammenhang der verschiedenen Gröſsenverknüpfungen, die Gesetze, nach welchen sich diese oder jene Funktion bildet, sobald ihre Veränderliche in bestimmten Werthen gegeben ist u. dergl. m. Die vollständige Auflösung dieser Aufgabe müſste natürlich darin bestehen, daſs man allgemeine Regeln bekäme, nach welchen man in jedem Falle eine verlangte Funktion entstehen lassen, folglich auch numerisch berechnen könnte, und dieſs kann auf keine andere Weise als durch eine am Faden der Gleichungen fortlaufende Betrachtung geschehen. Es lieſse sich wohl auch eine Analysis denken, welche sich mit unbestimmteren Beziehungen, etwa Ungleichheiten, Ähnlichkeiten u. dergl. willkührlichen Relationen beschäftigte, aber diese würde nur von ganz untergeordneter Bedeutung sein, da man in das Wesen der Gröſsenverknüpfungen offenbar durch Gleichungen die klarste Einsicht bekommen muſs. Ohne also die Versuche, welche von so schwankenden und untergeordneten Standpunkten aus gemacht werden könnten und gemacht worden sind, weiter zu beachten, wollen wir uns jetzt nach den Rechtstiteln umsehen, unter welchen uns die Rechnung mit unendlichen Reihen erlaubt ist.

Zuerst erhellt, daſs wir die divergenten Reihen aus analytischen Betrachtungen ganz ausschlieſsen müssen; denn da unsere Analysis sich mit Identitäten beschäftigt und divergente Reihen keiner bestimmten Gröſse identisch sind, sondern sich dem Rechner unter den Händen beständig ändern, so muſs hier jede weitere Betrachtung aufhören; alle fernere Rechnung mit ihnen, welche sich ohnehin nur auf die Hypothese stützt, daſs hier die arithmetischen Regeln noch anwendbar seien, ist ein Herumtappen im Finstern. So bleiben uns nur die convergenten Reihen und bei diesen lassen sich die Umstände, unter welchen man mit ihnen rechnen kann, leicht aus der Lehre von den Gränzen herleiten. Wir haben nämlich folgende Hauptsätze:

1) Die Summe zweier convergenten Reihen ist selbst eine convergente Reihe. Denn wenn

Digitized by Google

$$P_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$
$$Q_n = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_n$$

ist, worin $P_n$ und $Q_n$ Funktionen von $n$ sind, welche sich für wachsende $n$ endlichen bestimmten Gränzen nähern, so ist

$$u_0 + v_0 + u_1 + v_1 + \cdots + u_n + v_n = P_n + Q_n$$

folglich durch Übergang zur Gränze für unendlich wachsende $n$

$$u_0 + v_0 + u_1 + v_1 + u_2 + v_2 + \cdots \text{ in inf.} = Lim\,(P_n + Q_n)$$

d. h. gleich einer endlichen Gröfse, mithin die Reihe links convergent.

2) Das Produkt zweier convergenten Reihen mit lauter positiven Gliedern bildet wieder eine convergente Reihe.

Um eine bequeme Übersicht über die Partialprodukte der Multiplikation zu haben, wollen wir die beiden Reihen nach Potenzen einer beliebigen Gröfse $x$ fortgehen lassen und setzen

$$P_{2n} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{2n} x^{2n} \quad (1)$$
$$Q_{2n} = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_{2n} x^{2n} \quad (2)$$

Das Produkt von beiden Reihen ist:

$$\begin{aligned} &a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) x \\ &+ (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) x^2 \\ &+ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ &+ (a_0 b_{2n} + a_1 b_{2n-1} + \cdots + a_{2n-1} b_1 + a_{2n} b_0) x^{2n} \\ &+ (a_1 b_{2n} + a_2 b_{2n-1} + \cdots + a_{2n-1} b_2 + a_{2n} b_1) x^{2n+1} \\ &+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &+ (a_{2n-1} b_{2n} + a_{2n} b_{2n-1}) x^{4n-1} \\ &+ a_{2n} b_{2n} x^{4n} \end{aligned} \quad (3)$$

Bezeichnen wir $S_{2n}$ die Summe der $n+1$ ersten Glieder des Produktes, also

$$\begin{aligned} S_{2n} = a_0 b_0 &+ (a_0 b_1 + a_1 b_0) x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) x^2 + \cdots \\ &\cdots + (a_0 b_{2n} + a_1 b_{2n-1} + \cdots + a_{2n-1} b_1 + b_{2n}) x^{2n} \end{aligned} \quad (4)$$

so ist

$$S_{2n} < P_{2n} Q_{2n} \quad (5)$$

weil $P_{2n} Q_{2n}$ aufser dem, was in $S_{2n}$ sich findet, noch die Glieder mit $x^{2n+1}$, $x^{2n+2}$, ... $x^{4n}$ enthält, welche positiv sind, da alle Glieder der Reihen (1) und (2) positiv angenommen werden. Multiplizirt man dagegen die Reihen

Digitized by Google

$$P_n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n \qquad (6)$$
$$Q_n = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n \qquad (7)$$

welche $n$ Glieder weniger enthalten, als die in (1) und (2), so erhält man als Produkt

$$\begin{aligned} &a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) x \\ &+ (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) x^2 \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ (a_{n-1} b_n + a_n b_{n-1}) x^{2n-1} \\ &+ a_n b_n x^{2n} \end{aligned}$$

und aus der Vergleichung desselben mit (4) ergiebt sich

$$S_{2n} > P_n Q_n \qquad (8)$$

Es ist also zusammen mit (5)

$$P_{2n} Q_{2n} > S_{2n} > P_n Q_n \qquad (9)$$

Lassen wir nun $n$ ins Unendliche wachsen, so werden die mit $P_{2n}$ und $P_n$, $Q_{2n}$ und $Q_n$ bezeichneten Reihen zugleich unendliche; bezeichnen wir ihre Summen mit $P$ und $Q$, welches hier wegen der Convergenz jener Reihen endliche bestimmte Gröfsen sind, so ist

$$Lim\ P_{2n} = Lim\ P_n = P$$
$$Lim\ Q_{2n} = Lim\ Q_n = Q$$

Die äufsersten Gränzen in der Ungleichung (9), zwischen denen $S_{2n}$ liegt, rücken also dann immer näher an einander und es mufs folglich sein:

$$Lim\ S_{2n} = PQ$$

d. h. die Summe der Reihe (4) ist endlich, folglich die Reihe convergent und ihre Summe gleich dem Produkte der ihre Faktoren bildenden Reihensummen.

Hörten die Reihen (1) und (2) mit ungeradstelligen Gliedern auf, d. h. wären sie von der Form

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{2n} x^{2n} + a_{2n+1} + x^{2n+1}$$
$$b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_{2n} x^{2n} + b_{2n+1} + x^{2n+1}$$

so bezeichne man sie mit

$$P_{2n} + a_{2n+1} x^{2n+1} \text{ und } Q_{2n} + b_{2n+1} x^{2n+1}$$

und setze dieſs in dem vorigen Beweise für $P_{2n}$ und $Q_{2n}$, so reduzirt man diesen Fall auf den vorigen und kann nun allgemein sagen:

Wenn die unendlichen und convergenten Reihen

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots \qquad (10)$$
$$b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \ldots \qquad (11)$$

nur positive Glieder enthalten, so ist ihr Produkt identisch mit

Digitized by Google

$$a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) x^2 + \dots \quad (12)$$

und das Produkt ihrer Summen gleich der Summe dieser neuen Reihe. — In diesem Falle also ist die Multiplikation nach den Regeln der Arithmetik geradezu erlaubt.

Die soeben geführten Schlüsse finden aber gar keine Anwendung mehr, wenn die Reihen (1) und (2) auch negative Glieder enthalten. Denn in diesem Falle kann man nicht sagen, dafs $S_{2n} < P_{2n} Q_{2n}$ sei, weil die Glieder, welche $P_{2n} Q_{2n}$ mehr enthält, als $S_{2n}$ zusammen so viel Negatives geben könnten, dafs $P_{2n} Q_{2n}$ gleich oder gar kleiner als $S_{2n}$ würde und ebenso wenig könnte man behaupten, dafs $S_{2n} > P_n Q_n$ sei. — Sind die Glieder in den Reihen (10) und (11) mit wechselnden Zeichen versehen, also $a_0$, $a_2$, $a_4$ etc. positiv, $a_1$, $a_3$, $a_5$ etc. negativ und besitzen diese neuen Reihen

$$a_0 - a_1 x + a_2 x^2 - a_3 x^3 + \dots \quad (13)$$

$$b_0 - b_1 x + b_2 x^2 - b_3 x^3 + \dots \quad (14)$$

die Eigenschaft, convergent zu bleiben, wenn man ihnen durchaus positive Zeichen giebt, so läfst sich die Sache leicht entscheiden. Denn in diesem Falle ist die Reihe (12) convergent, folglich ist es um so mehr die folgende

$$a_0 b_0 - (a_0 b_1 + a_1 b_0) x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) x^2 - \dots \quad (15)$$

welche das Produkt von (13) und (14) ist, mithin gilt dann der Satz noch.

Haben dagegen die Reihen (13) und (14) die Eigenschaft, divergent zu werden, sobald man die Glieder auf ihre absoluten Werthe reduzirt, so läfst sich auch die soeben gemachte Betrachtung nicht anwenden, also nichts beweisen. In der That erleidet dann auch der Satz Ausnahmen, wie man aus dem folgenden Beispiele sehen kann.

Multiplizirt man nach der gewöhnlichen Weise die Reihe

$$\frac{1}{\sqrt[4]{1}} - \frac{1}{\sqrt[4]{2}} + \frac{1}{\sqrt[4]{3}} - \frac{1}{\sqrt[4]{4}} + \dots \quad (16)$$

mit sich selbst, oder was das Nämliche ist, nimmt man die Reihen (13) und (14) gleich der vorstehenden und $x = 1$, so erhält man für die Reihe (15) die folgende:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{\sqrt[4]{1}} - \left(\frac{1}{\sqrt[4]{2}} + \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt[4]{3}} + \frac{1}{\sqrt[4]{2 \cdot 2}} + \frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right) \\ &- \left(\frac{1}{\sqrt[4]{4}} + \frac{1}{\sqrt[4]{3 \cdot 2}} + \frac{1}{\sqrt[4]{2 \cdot 3}} + \frac{1}{\sqrt[4]{4}}\right) + \text{etc.} \end{aligned}\right\} \quad (17)$$

Digitized by Google

deren allgemeines Glied, abgesehen vom Vorzeichen, unter folgender Form steht:

$$\frac{1}{\sqrt[4]{n}}+\frac{1}{\sqrt[4]{(n-1)\,.\,2}}+\frac{1}{\sqrt[4]{(n-2)\,3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt[4]{2\,(n-1)}}+\frac{1}{\sqrt[4]{n}}$$

in welcher man sich die einzelnen Summanden dadurch entstanden denken kann, dafs man in dem Ausdrucke

$$\frac{1}{\sqrt[4]{(n-p)\,(p+1)}} \qquad (18)$$

für $p$ der Reihe nach $0, 1, 2, \ldots n-1$ setzt. Nun ist aber immer*)

$$(n-p)\,(p+1) < \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \qquad (19)$$

Denn man setze $p = \frac{n-1}{2} \pm q$, wo nun $q$ jede beliebige Gröfse bedeuten kann, so erhält man

$$(n-p)\,(p+1) = \frac{(n+1)^2 - q^2}{4}$$

also in jedem Falle weniger, als wenn man $p = \frac{n-1}{2}$ gesetzt hätte, wodurch $\left(\frac{n+1}{2}\right)^2$ herausgekommen sein würde.

Aus der Gleichung (19) folgt nun

$$\frac{1}{(n-p)\,(p+1)} > \left(\frac{2}{n+1}\right)^2$$

mithin

$$\frac{1}{\sqrt[4]{(n-p)\,(p+1)}} > \sqrt{\frac{2}{n+1}}$$

folglich für $p = 0, 1, 2, \ldots n-1$,

---

*) Man findet dieſs leicht, wenn man die Sache geometrisch betrachtet. Man denke sich $n-p$ und $p+1$, worin $p$ ganz beliebig sein kann, als Seiten eines Rechtecks, so ist $(n-p)\,(p+1)$ sein Inhalt, und $n-p+p+1 = n+1$ sein Umfang, welcher hier in Bezug auf $p$ constant ist. Unter allen Rechtecken von gleichem Umfange hat aber das Quadrat den gröfsten Inhalt; für dieses sind die Seiten gleich, oder $n-p = p+1$, woraus folgt $p = \frac{n-1}{2}$. Dieser Werth von $p$ giebt also das Maximum des Ausdrucks $(n-p)\,(p+1)$ an.

Digitized by Google

$$\frac{1}{\sqrt[4]{n}} + \frac{1}{\sqrt[4]{(n-1)\,.\,2}} + \frac{1}{\sqrt[4]{(n-2)\,.\,3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt[4]{2\,.\,(n-1)}} + \frac{1}{\sqrt[4]{n}}$$

$$> n\sqrt{\frac{2}{n+1}}, \text{ d. i. } > \sqrt{\frac{2n}{1+\frac{1}{n}}}$$

Hieraus erkennt man, dafs die absoluten Werthe der einzelnen in der Reihe (17) enthaltenen Glieder beständig wachsen und dafs dieselbe, wenn $n$ ziemlich grofs ist, wo man $\frac{1}{n}$ weglassen kann, von dem $n$ten Gliede an ungefähr ebenso divergirt wie die Reihe

$$\sqrt{2n} - \sqrt{2n+2} + \sqrt{2n+4} - \sqrt{2n+6} + \ldots$$

Gleichwohl war die Reihe (16) convergent, aber sie würde eine divergente geliefert haben, wenn man die einzelnen Glieder sämmtlich positiv genommen hätte.

Man könnte glauben, die eben gezeigte sonderbare Erscheinung sei ein Beweis dafür, dafs divergente Reihen endliche Summen haben könnten, und könnte in unserem Beispiele das Quadrat der endlichen Gröfse, welche die Summe der Reihe (16) ist, für die Summe der divergenten Reihe (17) ausgeben wollen. Sieht man aber genauer hin, so wird man im Gegentheil gewahr werden, dafs dieser Schlufs ganz falsch und die ganze Rechnung nur ein Beweis dafür ist, dafs man Rechnungsoperationen, die für endliche bestimmte Gröfsen gelten, nicht ohne besondere Vorsicht auf unendlich fortlaufende Ausdrücke anwenden darf.

Das vollständige Produkt der als convergent vorausgesetzten Reihen

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots \qquad (20)$$

und

$$b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \cdots \qquad (21)$$

wäre nämlich

$$\left.\begin{array}{l} a_0 b_0 + a_0 b_1 x + a_0 b_2 x^2 + a_0 b_3 x^3 + \cdots \\ + a_1 b_0 x + a_1 b_1 x^2 + a_1 b_2 x^3 + a_1 b_3 x^4 + \cdots \\ + a_2 b_0 x^2 + a_2 b_1 x^3 + a_2 b_2 x^4 + a_2 b_3 x^5 + \cdots \\ + a_3 b_0 x^3 + a_3 b_1 x^4 + a_3 b_2 x^5 + a_3 b_3 x^6 + \cdots \\ + \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \end{array}\right\} \qquad (22)$$

und dieſs giebt in der That immer eine convergente Reihe, sobald man die Glieder in horizontaler oder vertikaler Richtung zusammennimmt. Aber so ordnet man die Glieder nicht; man bringt sie in dia-

Digitized by Google

gonaler Richtung zusammen, indem man immer diejenigen Glieder sucht, welche gleiche Potenzen von $x$ enthalten. Diese Anordnung ist es, welche den Fehler herbeiführt. Man nimmt gewissermafsen immer nur die eine durch die Diagonale abgeschnittene Hälfte von dem Quadrate, welches die sämmtlichen Glieder des Produktes bilden und bekümmert sich um die andere Hälfte nicht. Wird nun diese immer kleiner, je weiter man mit der Diagonale herabrückt, so ist eine solche Anordnung erlaubt, wird sie aber immer gröfser, wie in unserem Beispiele, so ist diese Anordnung falsch, weil sie vernachlässigt, was nicht vernachlässigt werden darf. Man kann diefs auch so ausdrücken: Das Aggregat der Glieder in (22) ist das vollständige Produkt der Reihen (20) und (21), die Reihe

$$a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_3) x^2 + \dots$$

dagegen nur das unvollständige Produkt; dieses kann jenes vertreten, wenn das, was zur Vollständigkeit fehlt, immer kleiner wird, wie unter den oben angegebenen Umständen; das unvollständige Produkt darf aber nicht an die Stelle des vollständigen gesetzt werden, wenn man nicht von der beständigen Abnahme der Ergänzung überzeugt ist.

Durch die beiden hier bewiesenen Sätze 1 und 2 haben wir uns nun diejenigen Rechtstitel verschafft, unter welchen uns die nothwendigsten Rechnungen mit den unendlichen Reihen erlaubt sind und wir werden von denselben gleich im nächsten Capitel Gebrauch machen.

3) Es mögen hier endlich noch ein paar Theoreme stehen, welche man bisweilen anzuwenden Gelegenheit findet.

I. Wenn in der unendlichen Reihe

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots \text{ in inf.}$$

der Quotient $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ für alle Werthe von $n$ eine gewisse endliche Gröfse $k$ nicht übersteigt, so ist für beständig bis zur Null abnehmende $x$

$$Lim\,(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots \text{ in inf.}) = a_0$$

Unter der gemachten Voraussetzung ist nämlich

$$a_1 \leqq k a_0,\ a_2 \leqq k a_1,\ a_3 \leqq k a_2,\ a_4 \leqq k a_3 \text{ etc.}$$

und wenn man jede Ungleichung in die nächste substituirt,

$$a_1 \leqq k a_0,\ a_2 \leqq k^2 a_0,\ a_3 \leqq k^3 a_0,\ a_4 \leqq k^4 a_0,\ \dots$$

folglich

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \dots$$
$$\leqq a_0 + k a_0 x + k^2 a_0 x^2 + k^3 a_0 x^3 + k_4 a_0 x^4 + \dots$$

d. i.

Digitized by Google

$$\leqq a_0 [1 + kx + (kx)^2 + (kx)^3 + kx)^4 + \ldots]$$

Lassen wir nun $x$ immer kleiner werden, so wird es auch einmal $< \frac{1}{k}$, also $kx < 1$; dann ist die eingeklammerte Reihe convergent und man erhält durch ihre Summirung

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots \text{ in inf.} \leqq \frac{a_0}{1 - kx}$$

Lassen wir jetzt $x$ bis zur Gränze 0 abnehmen, so erhalten wir

$$Lim\,(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots \text{ in inf.}) \leqq a_0$$

Sind aber $a_1$, $a_2$, $a_3$ etc. alle positiv, so kann die *Lim.* links offenbar nicht kleiner als $a_0$ sein; es fällt also das obere Zeichen weg und bleibt

$$Lim\,(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots \text{ in inf.}) = a_0.$$

Kommen verschiedene Vorzeichen in der Reihe vor, so zerlegt man sie in zwei andere, von denen die eine die positiven, die andere die negativen Glieder enthält, und behandelt jede einzeln nach dem obigen Satze; man erhält dann das Nämliche wieder.

Da die Bedingung, dafs der Quotient $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ eine bestimmte endliche Gröfse nicht übersteige, bei convergenten Reihen immer erfüllt ist, wie man leicht aus §. 22 erkennen kann, so läfst sich der Satz auch so aussprechen: in jeder convergenten Reihe $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$ *in inf.* ist

$$Lim\,(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots) = a_0.$$

Sind für alle unter einer gewissen Gränze stehenden Werthe von $x$ die beiden als convergent vorausgesetzten Reihen

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots$$
$$b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \ldots$$

einander identisch, so ist $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$ etc. Denn durch Übergang zur Gränze für unendlich abnehmende $x$ ist

$$Lim\,(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots) = Lim\,(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots)$$
$$\text{d. h. } a_0 = b_0$$

folglich bleibt noch

$$a_1 x + a_2 x^2 + \ldots = b_1 x + b_2 x^2 + \ldots$$

oder

$$a_1 + a_2 x + \ldots = b_1 + b_2 x + \ldots$$



Digitized by Google

Hierauf ist nun der nämliche Schluſs wieder anwendbar, durch welchen man findet $a_1 = b_1$, dann $a_2 = b_2$ u. s. f.

Auf divergente Reihen passen übrigens die obigen Betrachtungen nicht und also ist man dann nicht zu einer Coeffizientenvergleichung berechtigt.

---

# Capitel V.
# Das Binomialtheorem.

## §. 27.

Bestimmung der hierher gehörenden Aufgabe und erste Schritte zur Lösung derselben.

Die einfachste unter denjenigen Funktionen, welche wir in der Analysis betrachten, ist die Potenz, da die vier ersten Funktionen $a + x$, $a - x$, $ax$, $\frac{a}{x}$, welche aus den vier Spezies hervorgehen, kein besonderes Interesse darbieten und die an ihnen vorkommenden Aufgaben durch blose Anwendung der algebraischen Regeln gelöst werden können. Der Ausdruck $x^\mu$, in welchem $x$ veränderlich, $\mu$ constant ist, wäre also das Thema unserer nächsten Untersuchungen.

Die Veränderlichkeit des $x$ bringt hier sogleich eine Frage ins Spiel, nämlich die: nach welchem Gesetze wird sich die ganze Funktion $x^\mu$ ändern, wenn sich die in ihr enthaltene Veränderliche $x$ um eine gegebene Gröfse $k$ verändert? oder mit anderen Worten: welches wird der Werth von $(x + k)^\mu$ sein? — Bevor wir eine allgemeine Lösung dieser Aufgabe versuchen, wollen wir uns nach den Mitteln umsehen, durch welche wir dieselbe wenigstens in dem einen oder anderen Falle lösen könnten und zugleich die Aufgabe selbst auf ihre möglichst einfache Gestalt zu bringen suchen.

Nun ist zuerst klar, dafs man sich $(x + k)^\mu$ dadurch entstanden denken kann, dafs man $\left(\frac{x}{k} + 1\right)^\mu$ mit $k^\mu$ multiplizirt hat; und da hier $x$ eine beliebige Gröfse bedeutet, so ist es auch erlaubt, $kx$ an die Stelle von $x$ zu setzen, wodurch sich die Aufgabe auf die speziellere reduzirt, den Werth von $(x + 1)^\mu$ aufzufinden. Wenn nun hier $\mu$ eine positive

Digitized by Google

ganze Zahl bedeutet, so bemerkt man leicht ein Mittel zur Lösung der Aufgabe, nämlich die wirkliche Ausführung der successiven Multiplikation. Ohne uns also jetzt auf die Fälle einzulassen, in welchen $\mu$ etwas Anderes als eine ganze positive Zahl bedeutet, wollen wir wenigstens den genannten speziellen Fall durch das angegebene Mittel zu beherrschen suchen.

Wenn man nun die Gröfse $1 + x$ mehrmals mit sich selbst multiplizirt, so erhält man folgendes Schema:

$$
\begin{array}{ll}
1 + x = 1 + 1 \cdot x & \\
\qquad\qquad 1 + x \text{ mal genommen} & \\
\hline
\text{giebt} \qquad 1 + 1 \cdot x & \\
\qquad\quad + 1 \cdot x + 1 \cdot x^2 & \\
\hline
(1 + x)^2 = 1 + 2 \cdot x + 1 \cdot x^2 & \\
\qquad\qquad 1 + x \text{ mal genommen} & \\
\hline
\text{giebt} \qquad 1 + 2 \cdot x + 1 \cdot x^2 & \\
\qquad\qquad\quad 1 \cdot x + 2 \cdot x + 1 \cdot x^3 & \\
\hline
(1 + x)^3 = 1 + 3 \cdot x + 3 \cdot x^2 + 1 \cdot x^3 & \\
\qquad\qquad 1 + x \text{ mal genommen} & \\
\hline
\text{giebt} \qquad 1 + 3 \cdot x + 3 \cdot x^2 + 1 \cdot x^3 & \\
\qquad\quad + 1 \cdot x + 3 \cdot x^2 + 3 \cdot x^3 + 1 \cdot x^4 & \\
\hline
(1 + x)^4 = 1 + 4 \cdot x + 6 \cdot x^2 + 4 \cdot x^3 + 1 \cdot x^4 & \\
\qquad\qquad \text{u. s. f.} &
\end{array}
$$

Aus dem Gange dieser Multiplikation erhellt zunächst, dafs die Potenzen von $x$ regelmäfsig aufsteigen und zwar von der nullten $= 1$ bis zu einer, deren Exponent derselbe ist, als der des links stehenden $1 + x$; dafs also für ein ganzes positives $m$

$$(1 + x)^m = 1 + m_1 x + m_2 x^2 + m_3 x^3 + \ldots + m_m x^m \quad (1)$$

sein würde, worin $m_1$, $m_2$, $m_3$, $\ldots$ $m_m$ gewisse Zahlen bedeuten, welche nicht von $x$, sondern allein von $m$ abhängen und die man Binomialcoeffizienten nennt. Man bemerkt auch leicht das Gesetz, nach welchem sich diese Zahlen bilden; dasselbe spricht sich nämlich in dem folgenden Schema aus, welches aus dem obigen durch Weglassung der Potenzen von $x$ gebildet ist:



Digitized by Google

I; 1, 1
1, 1 addirt
II; 1, 2, 1
1, 2, 1 add.
III; 1, 3, 3, 1
1, 3, 3, 1 add.
IV; 1, 4, 6, 4, 1
u. s. f.

Hierin geben die römischen Ziffern den Exponenten oder die Ordnung an, zu welcher die Binomialcoeffizienten gehören. Man bemerkt auch sogleich zwei Eigenschaften derselben, nämlich erstens, dafs zwei Coeffizienten, von denen der eine so weit vom Ende absteht, als der andere vom Anfange, einander gleich sind. Bezeichnen wir der Symmetrie wegen den Coeffizienten, welcher zur Potenz $x^0$ gehört, und der immer $= 1$ ist, mit $m_0$, so sind $m_p$ und $m_{m-p}$ zwei Coeffizienten, von denen der erste so weit vom Anfang entfernt ist, als der zweite vom Ende, und man kann nun jenes Gesetz durch die Gleichung

$$m_p = m_{m-p} \qquad (2)$$

ausdrücken.

Ferner ergiebt sich aus dem Bildungsschema der Binomialcoeffizienten, dafs jeder Coeffizient der nächst höheren Ordnung die Summe von zwei benachbarten Coeffizienten der vorhergehenden Ordnung ist. Diefs kann man auch ganz allgemein auf folgende Weise einsehen. Setzt man in der Gleichung (1) $m + 1$ für $m$, so ist

$$\left.\begin{aligned}(1+x)^{m+1} \\ = (m+1)_0 + (m+1)_1 x + (m+1)_2 x^2 + \cdots + (m+1)_{m+1} x^{m+1}\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

worin $(m+1)_0$, $(m+1)_1$ etc. die zum Exponenten $m+1$ gehörenden Coeffizienten andeuten. Nun entsteht aber $(1+x)^{m+1}$ aus $(1+x)^m$ dadurch, dafs man die letztere Gröfse mit $1 + x$ multiplizirt; nimmt man diese Multiplikation mit der Gleichung (1) vor, so ergiebt sich

$$\begin{aligned}(1+x)^{m+1} = {} & m_0 + m_1 x + m_2 x^2 + m_3 x^3 + \cdots + m_m x^m \\ & + m_0 x + m_1 x^2 + m_2 x^3 + \cdots + m_{m-1} x^m + m_m x^{m+1}\end{aligned}$$

Vergleicht man hiermit (3), so erhält man

$$m_0 = (m+1)_0$$

$$m_0 + m_1 = (m+1)_1, \quad m_1 + m_2 = (m+1)_2, \quad m_2 + m_3 = (m+1)_3, \cdots$$

$$m_m = (m+1)_{m+1}$$

Digitized by Google

Die erste und letzte Gleichung geben nichts Neues, weil für jedes $m$ offenbar $m_0 = m_m = 1$ ist. Alle übrigen Gleichungen dagegen stehen unter einer allgemeinen Form, nämlich unter der folgenden:

$$m_{p-1} + m_p = (m+1)_p \qquad (4)$$

aus welcher man sie erhält, wenn man für $p$ der Reihe nach $1, 2, 3, \ldots m$ setzt.

Diese Eigenschaft der Binomialcoeffizienten macht es möglich, eine Tafel derselben zu berechnen, weil man die ersten zwei Binomialcoeffizienten 1 und 1 weifs, welche für $m = 1$ vorhanden sind und die obige Formel die Coeffizienten der nächsten Ordnung lehrt, wenn die der vorhergehenden bekannt sind. Der Anfang einer solchen Tabelle sähe so aus:

| $m$ \|\| $p=$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | | | | | | |
| 1 | 1 | 1 | | | | | |
| 2 | 1 | 2 | 1 | | | | |
| 3 | 1 | 3 | 3 | 1 | | | |
| 4 | 1 | 4 | 6 | 4 | 1 | | |
| 5 | 1 | 5 | 10 | 10 | 5 | 1 | |
| 6 | 1 | 6 | 15 | 20 | 15 | 6 | 1 |

u. s. f.

Links stehen vertikal herab die Werthe des Exponenten $m$ und oben die des Index $p$. Um also einen bestimmten Binomialcoeffizienten, etwa $6_4$, zu finden, geht man in der bei $m = 6$ stehenden Horizontalreihe so weit fort, bis man in die Vertikalreihe mit der Überschrift 4 kommt; hier findet man $6_4 = 15$. Jede Zahl in der Tafel ist die Summe der über ihr stehenden und der vor der letzteren vorhergehenden, wie dieſs der Gleichung (4) gemäfs sein mufs, und hiernach kann man die Tafel beliebig weit fortsetzen. Es mag noch bemerkt werden, dafs Coeffizienten mit negativem Index, also die Gröfsen $m_{-1}$, $m_{-2}$ etc. hier keinen Sinn haben, weil die Reihe der Indices mit 0 anfängt und nach den natürlichen (positiven) Zahlen fortgeht. Wo also dergleichen Binomialcoeffizienten vorkommen, kann man sie $= 0$ setzen, weil ihnen keine Potenz von $x$ entspricht.

Das in der Gleichung (4) ausgesprochene Theorem läfst sich noch auf folgende Weise verallgemeinern. Setzt man für die ganze positive Zahl $m$ eine andere $\alpha$ und den Index $n$ für $p$, so ist

Digitized by Google

$$(\alpha + 1)_n = \alpha_n + \alpha_{n-1}$$

Schreibt man hier $n - 1$ für $n$, so ist auch

$$(\alpha + 1)_{n-1} = \alpha_{n-1} + \alpha_{n-2}$$

Wenn man dieſs zu der vorigen Gleichung addirt, so kann man links wieder die Formel (4) in Anwendung bringen, sobald man $\alpha + 1$ für $m$ und $n$ für $p$ genommen denkt. Hierdurch erhält man

$$(\alpha + 2)_n = \alpha_n + 2\alpha_{n-1} + \alpha_{n-2}$$

Setzt man hier wieder $n - 1$ für $n$, so wird

$$(\alpha + 2)_{n-1} = \alpha_{n-1} + 2\alpha_{n-2} + \alpha_{n-3}$$

und durch Zusammenfassung dieser Gleichung mit der vorigen, mit Anwendung von Formel (4) für $m = \alpha + 2$, $p = n$,

$$(\alpha + 3)_n = \alpha_n + 3\alpha_{n-1} + 3\alpha_{n-2} + 3\alpha_{n-3}$$

Eine Wiederholung dieses Verfahrens würde geben

$$(\alpha + 4)_n = \alpha_n + 4\alpha_{n-1} + 6\alpha_{n-2} + 4\alpha_{n-3} + \alpha_{n-4}$$

Man übersieht leicht, wie sich diese Operation beliebig weit fortsetzen liefse und dafs die Coeffizienten, welche hier erscheinen, die nämlichen sind, welche wir bereits unter dem Namen der Binomialcoeffizienten in jener Tabelle kennen gelernt haben. Sie bilden sich nämlich auf dieselbe Weise durch successive Addition, wie die Zahlen der vorher aufgestellten Tabelle. Geht man also in jener Operation so weit fort, bis man $n$ um $\beta$ verkleinert hätte, wobei $\beta$ eine ganze positive Zahl bezeichnet, so erhält man

$$\left.\begin{aligned}(\alpha + \beta)_n = \alpha_n\beta_0 + \alpha_{n-1}\beta_1 + \alpha_{n-2}\beta_2 + \cdots + \alpha_{n-r}\beta_{n-r} + \cdots \\ \cdots + \alpha_{n-\beta+1}\beta_{\beta-1} + \alpha_{n-\beta}\beta_\beta\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

wobei $r$ eine beliebige mitten in der Reihe stehende Zahl bedeutet. Ist nun erstlich $\beta > n$, so werden einige der vorkommenden Indices negativ, also die zugehörigen Coeffizienten $= 0$. Um diese auszuscheiden, brauchen wir blos zu bemerken, von welcher Stelle an die Zahlen 1, 2, 3, ... $r$ etc., welche in den Stellenzeigern des $\alpha$ abgezogen werden, die Zahl $n$ zu übersteigen anfangen. Dieſs geschieht, wenn die beliebige Zahl $r = n$ geworden ist, das letzte noch existirende Glied ist dann $\alpha_{n-n}\beta_n = \beta_n$; darüber hinaus aber reduziren sich die folgenden Glieder $\alpha_{-1}$, $\alpha_{-2}$, ... $\alpha_{n-\beta}$, in deren Stellenzeigern $n + 1$, $n + 2$, ... $\beta$ von $n$ abgezogen werden, auf Null; es bleibt also für ganze positive $n$ und $\beta$ und für $\beta > n$

$$\left.\begin{aligned}(\alpha + \beta)_n \\ = \alpha_n\beta_0 + \alpha_{n-1}\beta_1 + \alpha_{n-2}\beta_2 + \cdots + \alpha_1\beta_{n-1} + \beta_n\end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Digitized by Google

Ist zweitens $\beta = n$, so geht die Gleichung (5) unmittelbar in die vorstehende über, also gilt die letztere unter der erweiterten Bedingung $\beta \geqq n$. Auch selbst für $\beta < n$ ist dieselbe noch allgemein richtig. Denn man kann dann zu der Gleichung (5), ohne sie zu stören, rechts noch die Glieder

$$\alpha_{n-\beta-1}\beta_{\beta+1},\ \alpha_{n-\beta-2}\beta_{\beta+2},\ \cdots\ \alpha_0\beta_{\beta+n-\beta}$$

zusetzen, welche sämmtlich gleich Null sind, weil $\beta_{\beta+1}$, $\beta_{\beta+2}$ etc. $= 0$ sind. Dadurch kommt aber die Gleichung (5) wieder auf die Form (6) und es ist also für beliebige ganze positive $\alpha$, $\beta$ und $n$

$$\left.\begin{aligned}(\alpha+\beta)_n \\ = \alpha_n\beta_0 + \alpha_{n-1}\beta_1 + \alpha_{n-2}\beta_2 + \cdots + \alpha_1\beta_{n-1} + \alpha_0\beta_n\end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Diese Formel könnte dazu dienen, um aus den Binomialcoeffizienten von $\alpha$ und $\beta$ einen beliebigen Coeffizienten des Exponenten $\alpha + \beta$ zu berechnen; doch ist dieſs nicht ihre wichtigste Eigenschaft, die obige Gleichung wird uns nämlich später analytisch sehr bedeutsam.

## §. 28.

### Weitere Betrachtung der Binomialreihe.

Wir sind nun zwar durch die Betrachtungen des vorigen Paragraphen zn einer Auflösung unseres Problemes für den Fall eines ganzen positiven Exponenten gelangt, werden uns aber bei einiger Aufmerksamkeit selbst gestehen müssen, dafs diese Lösung noch an vielen Mängeln leidet. Denn abgesehen davon, dafs wir noch gar nicht wissen, wie der Fall eines nicht ganzen positiven Exponenten zu behandeln wäre, hat unsere Lösung darin eine bedeutende Unvollkommenheit, dafs die Werthe der Binomialcoeffizienten nicht unmittelbar angegeben werden, sondern dafs zur Berechnung eines Binomialcoeffizienten die Kenntnifs fast aller vorhergehenden nöthig ist. Es mufs daher zunächst unsere Aufgabe sein, eine independente Bestimmung dieser Coeffizienten, d. h. das Gesetz zu entdecken, nach welchem sich irgend ein Coeffizient eines gegebenen Exponenten aus diesem bildet. Da wir nun schon eine Tabelle der Binomialcoeffizienten haben, welche wir beliebig weit fortführen können, so liefse sich die genannte Aufgabe vielleicht dadurch lösen, dafs man eine Vergleichung der in jeder Horizontalreihe stehenden Coeffizienten mit dem jedesmaligen vorgesetzten Exponenten unternähme. Dieſs führt zu folgenden Bemerkungen:

1) Die Zahlen unter der Überschrift 0 sind sämmtlich $= 1$; dafs dieſs so sein müsse, ist leicht einzusehen. Multiplizirt man nämlich eine Reihe Faktoren $(a+x)\,(b+x)\,(c+x)$ u. s. f., so ist das erste von $x$ freie

Digitized by Google

Glied $= abc \ldots$; in unserem Falle sind die $a$, $b$, $c$ u. s. f. alle einander gleich und $= 1$, weil $1 + x$ mit sich selbst multiplizirt wird, folglich ist auch $abc \ldots = 1$, oder für jedes beliebige $m$,

$$m_0 = 1.$$

2) Die Zahlen unter der Überschrift 1 sind dem jedesmaligen Exponenten gleich, und diefs erhellt auch aus dem Gange der successiven Multiplikation, bei welcher jene Zahlen aus successiver Addition der Einheit entstehen. Wir hätten also

$$m_1 = m.$$

3) Dividirt man mit den Zahlen $m_1$ in die daneben stehenden unter der Rubrik 2, so erhält man als Quotienten der Reihe nach

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \frac{4}{2}, \frac{5}{2}, \ldots$$

Vergleicht man diefs mit dem voranstehenden Exponenten, so scheint das Gesetz obzuwalten

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{m-1}{2}, \text{ folglich } m_2 = \frac{m-1}{2} m_1$$

oder durch Substitution des Werthes von $m_1$

$$m_2 = \frac{m(m-1)}{2}.$$

4) Dividirt man wieder mit den Zahlen unter 2 in die benachbarten unter der Aufschrift 3, so stellen sich die Quotienten unter die Form:

$$\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \frac{4}{3}, \ldots$$

worin sich das Gesetz

$$\frac{m_3}{m_2} = \frac{m-2}{3} \text{ oder } m_3 = \frac{m-2}{3} m_2$$

auszusprechen scheint, welches durch Substitution des Werthes von $m_2$ zu der Gleichung

$$m_3 = \frac{m(m-1)(m-2)}{2 \cdot 3}$$

führt. Eine Vergleichung der bisherigen Resultate scheint auf folgendes Bildungsgesetz zu deuten:

$$\left.\begin{array}{l} m_0 = 1. \quad m_p = \dfrac{m - \overline{p-1}}{p} m_{p-1} \\ \text{oder} \\ m_p = \dfrac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-\overline{p-1})}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots p} \end{array}\right\} \quad (1)$$

Digitized by Google

welches, wenn es richtig wäre, die Auflösung unserer Aufgabe enthielte, da man durch die zweite Formel für $m_p$ in den Stand gesetzt wird, den Werth dieses Quotienten unabhängig von allen anderen aus Exponent und Index unmittelbar zu berechnen.

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dafs das nach Analogie entworfene Bildungsgesetz das richtige sei, vermehrt sich sehr durch die Bemerkung, dafs die für $m_p$ angenommene Form die Gleichungen (2) und (4) des vorigen Paragraphen befriedigt. Es ist nämlich gemäfs der Formel (1)

$$m_{m-p} = \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-\overline{m-p-1})}{1\cdot 2\cdot 3\dots(m-p)} = \frac{m(m-1)(m-2)\dots(p+1)}{1\cdot 2\cdot 3\dots(m-p)}$$

$$= \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-\overline{p-1})(m-p)(m-\overline{p+1})\dots(p+1)}{1\cdot 2\cdot 3\dots p(p+1)(p+2)\dots m-\overline{p+1}(m-p)}$$

oder, wenn man im Zähler und Nenner die Faktorenreihe $(m-p)\dots(p+1)$ hebt,

$$m_{m-p} = \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-\overline{p-1})}{1\cdot 2\cdot 3\dots p} = m_p$$

übereinstimmend mit der Gleichung (2) in §. 27.

Ferner ist

$$m_{p-1} + m_p = m_{p-1} + \frac{m-\overline{p-1}}{p} m_{p-1} = \left(1 + \frac{m-p+1}{p}\right) m_{p-1}$$

$$= \frac{(m+1)}{p} m_{p-1} = \frac{m+1}{p} \cdot \frac{m(m-1)\dots(m-p+2)}{1\cdot 2\cdot 3\dots(p-1)}$$

$$= \frac{(m+1)(m+1-1)(m+1-2)\dots(m+1-\overline{p-1})}{1\cdot 2\cdot 3\dots p} = (m+1)_p$$

folglich erfüllt die angenommene Form die Gleichung (4) in §. 27. Aber so grofs auch hier die Wahrscheinlichkeit wird, dafs das angenommene Gesetz das richtige sei, so fehlt doch noch viel zur Gewifsheit, weil es ebenso gut mehrere verschiedene Funktionen von $m$ und $p$ geben könnte, welche die nämlichen Eigenschaften wie $m_p$ hätten, ohne damit identisch zu sein. Wir müssen uns daher nach einem viel allgemeineren Mittel umsehen, durch welches wir die Gleichung (1) auf ihre Richtigkeit prüfen können. Ein solches wäre nun das folgende: Man setzt in der Gleichung (1) des vorigen Paragraphen die hypothetisch angenommenen Werthe von $m_0, m_1, \dots m_m$, abstrahirt aber von dem auf der linken Seite stehenden $(1+x)^m$ und sucht die ihrer Form nach nun vollkommen bestimmte Reihe rechts zu summiren. Erhält man hierbei $(1+x)^m$ zur Summe, so ist dann das angenommene Bildungsgesetz richtig, weil aus der Gleichung

Digitized by Google

$$m_0 + m_1 x + m_2 x^2 + \ldots\ldots\ldots + m_m x^m$$
$$= 1 + \frac{m}{1} x + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \ldots + x^m$$

dann folgt $m_0 = 1$, $m_1 = \frac{m}{1}$ u. s. f. Wir hätten also die Frage zu beantworten, welche ist die Summe der Reihe

$$1 + \frac{m}{1} x + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \ldots + x^m$$

in welcher $x$ eine ganz beliebige Gröfse, $m$ eine positive ganze Zahl bedeutet?

Aber in so beschränkter Weise darf die Analysis ihre Aufgaben nicht fassen, wir müssen dieselbe erst noch möglichst allgemein zu stellen suchen und wir fragen daher gleich umfassender, welche ist die Summe der Reihe

$$1 + \frac{\mu}{1} x + \frac{\mu(\mu-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \ldots \quad (2)$$

welche hier unbestimmt weit fortgesetzt ist, und worin $x$ und $\mu$ ganz beliebige Gröfsen bedeuten?

Diese allgemeinere Aufgabe reduzirt sich für ein ganz und positiv angenommenes $\mu$ auf die vorige, weil dann die Reihe irgendwo abbricht. Für jedes andere $\mu$ aber annullirt sich keines ihrer Glieder und sie kann dann ins Unendliche fortgesetzt werden. Wollen wir in dem letzteren Falle ihre Summe finden, so ist zuvörderst nöthig, dafs die Reihe convergire; unter welchen Bedingungen diefs statt finde, ist schon früher untersucht worden und diefs kann uns nun als Basis für die weitere Betrachtung dienen.

## §. 29.

### Summirung der Binomialreihe.

Die Summe der entweder endlichen oder unendlichen und dann als convergent vorausgesetzten Reihe (2) wird offenbar eine gewisse Funktion der beiden Veränderlichen $\mu$ und $x$ sein; die Aufgabe, jene Reihe zu summiren, kommt demnach auf die andere zurück, die Natur einer noch unbekannten Funktion zu bestimmen. Diese Bestimmung müfste entweder aus speziellen Werthen oder aus Eigenschaften der Reihe geschehen; das Erste geht hier defswegen nicht, weil wir bei der gänzlichen Unbestimmtheit des $\mu$ und $x$ keine speziellen Werthe bekommen können, wir müssen

Digitized by Google

uns also an die zweite Weise halten. Dadurch scheint eine nicht unbedeutende Schwierigkeit in die Untersuchung zu gerathen, weil wir noch gar keine Eigenschaften der Reihe (2) kennen, die wir zur Bestimmung der ihr gleichen Funktion benutzen könnten. Indessen leitet folgende Bemerkung auf die Spur einer solchen. Wenn unsere hypothetisch angenommene Form der Coeffizienten die richtige wäre, so würde für $\mu =$ einer ganzen positiven Zahl $m$, die fragliche Funktion in $(1+x)^m$ übergehen müssen. Diese Funktion hat aber eine ganz charakteristische Eigenschaft, nämlich die, dafs für jedes $\alpha$ und $\beta$

$$(1+x)^{\alpha}(1+x)^{\beta} = (1+x)^{\alpha+\beta}$$

ist, aus der sich umgekehrt auch die Natur der Funktion bestimmen läfst. Bezeichnen wir also mit $f(m)$ die Summe der Reihe $1+\frac{m}{1}x+\ldots+x^m$, so mufs diese Funktion die Eigenschaft $f(\alpha)\,f(\beta) = f(\alpha+\beta)$ haben, vorausgesetzt, dafs das angenommene Bildungsgesetz richtig ist. Könnten wir nun umgekehrt zeigen, dafs die Summe $f(m)$ der fraglichen Reihe diese Eigenschaft habe, so würde sich wohl auch mit Hülfe von §. 12 daraus die Form der Funktion $f(m)$, d. h. die Summe jener Reihe bestimmen lassen. Diesen Gedanken wollen wir nun auszuführen suchen.

Sei also

$$f(\mu) = 1+\frac{\mu}{1}x+\frac{\mu(\mu-1)}{1\cdot 2}x^2+\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3+\ldots \quad (1)$$

worin $x$ beliebig ist, sobald $\mu$ eine ganze positive Zahl bedeutet, dagegen zwischen $+1$ und $-1$ liegen mufs, wenn $\mu$ andere als positive ganze Werthe hat. Bezeichnen wir die Coeffizienten der Reihe nach mit $\mu_0$, $\mu_1$, $\mu_2$ etc., wo nun diese Gröfsen nicht die wahren, sondern unsere hypothetisch angenommenen Binomialcoeffizienten bedeuten, so ist für jedes ganze positive $n$,

$$\mu_0 = 1,\ \mu_{n+1} = \frac{\mu-n}{n+1}\mu_n, \quad (2)$$

wodurch das Bildungsgesetz der Coeffizienten vollkommen bestimmt ist.

Schreiben wir diese Reihen für zwei andere beliebige Gröfsen $\alpha$ und $\beta$ statt $\mu$ hin, so haben wir

$$\left.\begin{aligned} f(\alpha) &= \alpha_0+\alpha_1 x+\alpha_2 x^2+\alpha_3 x^3+\ldots \\ \alpha_0 &= 1,\ \alpha_{n+1} = \frac{\alpha-n}{n+1}\alpha_n \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Digitized by Google

$$\left.\begin{aligned} f(\beta) &= \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3 + \cdots \\ \beta_0 &= 1,\ \beta_{n+1} = \frac{\beta - n}{n+1}\,\beta_n \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

und durch Multiplikation beider Reihen

$$\begin{aligned} f(\alpha)\,f(\beta) = {} & \alpha_0\beta_0 + (\alpha_0\beta_1 + \alpha_1\beta_0)\,x \\ & + (\alpha_0\beta_2 + \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_0)\,x^2 \\ & + (\alpha_0\beta_3 + \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1 + \alpha_2\beta_0)\,x^3 + \cdots \end{aligned}$$

Bezeichnen wir die Coeffizienten dieser neuen Reihe mit $\gamma_0$, $\gamma_1$, $\gamma_2$, $\cdots$ so ist

$$f(\alpha)\,f(\beta) = \gamma_0 + \gamma_1 x + \gamma_2 x^2 + \gamma_3 x^3 + \cdots \quad (5)$$

und für jedes ganze positive $n$,

$$\gamma_n = \alpha_n\beta_0 + \alpha_{n-1}\beta_1 + \alpha_{n-2}\beta_2 + \cdots + \alpha_1\beta_{n-1} + \alpha_0\beta_n, \quad (6)$$

ebenso

$$\gamma_{n+1} = \alpha_{n+1}\beta_0 + \alpha_n\beta_1 + \alpha_{n-1}\beta_2 + \cdots + \alpha_1\beta_n + \alpha_0\beta_{n+1} \quad (7)$$

Die Reihe, welche in (6) steht, ist der Form nach ganz gleich mit der in (7) §. 27, nur mit dem Unterschiede, dafs dort $\alpha$, $\beta$ ganze positive Zahlen und $\alpha_0$, $\alpha_1$ etc., $\beta_0$, $\beta_1$ etc. die wahren Binomialcoeffizienten bedeuteten, während hier $\alpha$ und $\beta$ alle möglichen Zahlen und $\alpha_0$, $\alpha_1$ etc., $\beta_0$, $\beta_1$ etc. die hypothetischen Binomialcoeffizienten bezeichnen. Wäre nun, wenn auch nicht allgemein, doch wenigstens für spezielle $\alpha$ und $\beta$, $\gamma_n = (\alpha+\beta)_n$, wo dieses Symbol den hypothetischen $n$ten Coeffizienten für $\alpha+\beta$ bedeutet, so müfste nach (2) sein

$$\gamma_{n+1} = \frac{\alpha+\beta-n}{n+1}\,\gamma_n$$

weil sich dann $\gamma_n$ so aus $\alpha+\beta$ bilden würde, wie $\alpha_n$ aus $\alpha$ und $\beta_n$ aus $\beta$. Wir hätten nun zu versuchen, ob sich diefs vielleicht bestätigte.

Nun ist offenbar

$$\begin{aligned} \frac{\alpha+\beta-n}{n+1} &= \frac{\alpha-n}{n+1} + \frac{\beta}{n+1} \\ &= \frac{\alpha-\overline{n-1}}{n+1} + \frac{\beta-1}{n+1} \\ &= \frac{\alpha-\overline{n-2}}{n+1} + \frac{\beta-2}{n+1} \\ &\quad\cdots\cdots\cdots \\ &= \frac{\alpha-1}{n+1} + \frac{\beta-\overline{n-1}}{n+1} \\ &= \frac{\alpha}{n+1} + \frac{\beta-n}{n+1} \end{aligned}$$

Digitized by Google

Multiplizirt man hiermit die Gleichung (6) und wendet im ersten Gliede die erste, im zweiten Gliede die zweite Form u. s. f. an, so ergiebt sich:

$$\begin{aligned}\frac{\alpha+\beta-n}{n+1}\gamma_n = {} & \frac{\alpha-n}{n+1}\alpha_n\beta_0 + \frac{\beta}{n+1}\alpha_n\beta_0 \\ & + \frac{\alpha-\overline{n-1}}{n+1}\alpha_{n-1}\beta_1 + \frac{\beta-1}{n+1}\alpha_{n-1}\beta_1 \\ & + \frac{\alpha-\overline{n-2}}{n+1}\alpha_{n-2}\beta_2 + \frac{\beta-2}{n+1}\alpha_{n-2}\beta_2 \\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + \frac{\alpha-1}{n+1}\alpha_1\beta_{n-1} + \frac{\beta-\overline{n-1}}{n+1}\alpha_1\beta_{n-1} \\ & + \frac{\alpha}{n+1}\alpha_0\beta_n + \frac{\beta-n}{n+1}\alpha_0\beta_n\end{aligned}$$

Nun ist aber für jedes ganze positive $p$

$$\frac{\mu-p}{p+1}\mu_p = \mu_{p+1}, \text{ folglich } (\mu-p)\,\mu_p = (p+1)\,\mu_{p+1}$$

und diese Formel hat man hier in jedem Gliede anzuwenden Gelegenheit; in der ersten Vertikalreihe für $\mu=\alpha$ und $p=n,\ n-1,\ n-2,\ \ldots$ 1, 0 und in der zweiten für $\mu=\beta$ und $p=0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ n-1,\ n$. Hierdurch erhält man:

$$\begin{aligned}\frac{\alpha+\beta-n}{n+1}\gamma_n = {} & \alpha_{n+1}\beta_0 + \frac{1}{n+1}\alpha_n\beta_1 \\ & + \frac{n}{n+1}\alpha_n\beta_1 + \frac{2}{n+1}\alpha_{n-1}\beta_2 \\ & + \frac{n-1}{n+1}\alpha_{n-1}\beta_2 + \frac{3}{n+1}\alpha_{n-2}\beta_3 \\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + \frac{2}{n+1}\alpha_2\beta_{n-1} + \frac{n}{n+1}\alpha_1\beta_n \\ & + \frac{1}{n+1}\alpha_1\beta_n + \alpha_0\beta_{n+1}\end{aligned}$$

oder, wenn man die Glieder diagonal zusammennimmt,

$$\frac{\alpha+\beta-n}{n+1}\gamma_n$$
$$= \alpha_{n+1}\beta_0 + \alpha_n\beta_1 + \alpha_{n-1}\beta_2 + \cdots + \alpha_1\beta_n + \alpha_0\beta_{n+1}$$

d. h. nach Formel (7)

$$\frac{\alpha+\beta-n}{n+1}\gamma_n = \gamma_{n+1}$$

Digitized by Google

und dieſs gilt für jedes beliebige $\alpha$ und $\beta$, weil die ganze Demonstration auf rein identischen Transformationen beruht. Setzt man der Reihe nach $n = 0, 1, 2, 3 \ldots$, so erhält man

$$\gamma_1 = \frac{\alpha+\beta}{1}\gamma_0$$

$$\gamma_2 = \frac{\alpha+\beta-1}{2}\gamma_1 = \frac{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta-1)}{1.2}\gamma_0$$

$$\gamma_3 = \frac{\alpha+\beta-2}{3}\gamma_2 = \frac{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta-1)(\alpha+\beta-2)}{1.2.3}\gamma_0$$

u. s. f.

Es ist aber $\gamma_0 = \alpha_0\beta_0 = 1.1$; führt man nun die Werthe von $\gamma_0$, $\gamma_1$, $\gamma_2$ etc. in die Gleichung (5) ein, so wird

$$f(\alpha)f(\beta) =$$

$$1 + \frac{\alpha+\beta}{1}x + \frac{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta-1)}{1.2}x^2 + \frac{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta-1)(\alpha+\beta-2)}{1.2.3}x^3 + \ldots$$

Vergleicht man die hier stehende Reihe mit der in (1), so übersieht man, dafs sie aus derselben hervorgeht, wenn $\mu = \alpha + \beta$ gesetzt wird; ihre Summe ist also $f(\alpha+\beta)$ und folglich haben wir die Gleichung

$$f(\alpha)f(\beta) = f(\alpha+\beta).$$

Wir kennen aber bereits die Form derjenigen Funktion, welcher diese Eigenschaft zukommt, dieselbe ist nämlich

$$f(\mu) = a^\mu$$

worin der Werth der Constanten $a$ durch die Gleichung $a = f(1)$ bestimmt wird. Nehmen wir in der Gleichung (1) $\mu = 1$, so wird für unseren Fall $a = f(1) = 1 + x$, folglich

$$f(\mu) = (1+x)^\mu$$

und hiermit ist für jedes $\mu$ die Summe der als convergent vorausgesetzten Reihe (1) gefunden. Fügen wir noch die Bedingung der Convergenz bei, so ist

$$\left.\begin{array}{c}(1+x)^\mu \\ = 1 + \frac{\mu}{1}x + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2}x^2 + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1.2.3}x^3 + \ldots \\ +1 > x > -1\end{array}\right\} \quad (8)$$

wobei die Bestimmung $+1 > x > -1$ nur für den Fall eines nicht ganzen und positiven $\mu$ gilt, weil im letzteren Falle die Reihe eine endliche für jedes $x$ gültige ist.

Wir haben also durch unsere Summirung mehr erfahren, als wir ur-

Digitized by Google

sprünglich hofften. Es war uns eigentlich nur darum zu thun, für ein ganzes positives $\mu$ das Bildungsgesetz der Coeffizienten zu prüfen; wir wissen jetzt, dafs jenes hypothetisch angenommene Gesetz das richtige ist und noch aufserdem, dafs für den Fall eines ächt gebrochenen $x$ für jeden Exponenten der Werth von $(1+x)^{\mu}$ durch eine Reihe dargestellt werden kann, welche ins Unendliche fortläuft und convergirt. Ist $x=1$, so wird die Reihe eine rein numerische und ihre Convergenz oder Divergenz kann nach den früher gegebenen Criterien beurtheilt werden; ist aber $x>1$, so divergirt die Reihe und hat keine Summe. Die Operation der Multiplikation der beiden dann ebenfalls divergenten Reihen (3) und (4) könnte dann gar nicht angewendet werden und wollte man sie willkührlich auf dieselben ausdehnen, so hiefse jetzt die Gleichung $f(\alpha)f(\beta)=f(\alpha+\beta)$ so viel als $\infty \cdot \infty = \infty$, was allerdings auch eine Auflösung derselben wäre, aber eine solche, auf die wir wegen ihrer Unbrauchbarkeit keine Rücksicht zu nehmen haben.

## §. 30.

### Folgerungen aus dem Bisherigen.

Die Formel (8), welche den Namen des allgemeinen Binomialtheoremes führt, ist eine der wichtigsten in der ganzen Analysis und die Basis vieler anderen Untersuchungen, die wir später durchführen werden. Vor der Hand wollen wir uns erst mit den verschiedenen Folgerungen beschäftigen, welche sich aus derselben ziehen lassen.

I. Um eine zweitheilige Gröfse $a+b$ auf die $\mu$te Potenz zu erheben, müssen wir zwei Fälle unterscheiden, ob nämlich $a>b$ oder $a<b$ ist. Im ersten ist

$$(a+b)^{\mu} = a^{\mu}\left(1+\frac{b}{a}\right)^{\mu}$$

und da hier der Voraussetzung nach $\frac{b}{a}$ ein ächter Bruch ist, so können wir diesen Quotienten an die Stelle von $x$ in (8) setzen, wodurch sich ergiebt

$$\left.\begin{aligned}(a+b)^{\mu} \\ = a^{\mu}\left\{1+\frac{\mu}{1}\cdot\frac{b}{a}+\frac{\mu(\mu-1)}{1\cdot 2}\left(\frac{b}{a}\right)^2+\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{b}{a}\right)^3+\ldots\right\}\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

$a>b.$

Ist dagegen $a<b$, so kann man

Digitized by Google

$$(a+b)^\mu = b^\mu \left(1+\frac{a}{b}\right)^\mu$$

setzen, wo nun $\frac{a}{b}$ ein ächter Bruch ist. Hierdurch erhält man ähnlich

$$\left.\begin{matrix}(a+b)^\mu \\ = b^\mu \left\{1+\frac{\mu}{1}\cdot\frac{a}{b}+\frac{\mu(\mu-1)}{1\cdot 2}\left(\frac{a}{b}\right)^2+\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{a}{b}\right)^3+\ldots\right\}\end{matrix}\right\} \quad (2)$$

$a < b$

Für ein ganzes positives $\mu = m$ fallen beide Formeln nach Auflösung der Parenthese in die folgende zusammen:

$$\left.\begin{matrix}(a+b)^m \\ = a^m+\frac{m}{1}a^{m-1}b+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}a^{m-2}b^2+\ldots+\frac{m}{1}ab^{m-1}+b^m\end{matrix}\right\} \quad (3)$$

Die Reihe rechts enthält $m+1$ Glieder; ist nun $m$ gerade, so giebt es ein mittelstes Glied, in welchem die Exponenten von $a$ und $b$ einander gleich sind und dessen Coeffizient nur einmal vorkommt; ist aber $m$ ungerade, so giebt es kein mittelstes Glied und jeder Binomialcoeffizient kommt zweimal vor.

Die Formel (1) kann bei gebrochenem $\mu$ zur Wurzelausziehung benutzt werden. Ist nämlich $a$ die nächst kleinere Zahl unter der gegebenen $a+b$, aus welcher man noch die Wurzel ziehen kann, so läfst sich der Werth von $a^\mu$ angeben, mithin der ganze Ausdruck rechts numerisch berechnen. Wollte man z. B. aus 11 die Quadratwurzel ziehen, so setze man $\mu = \frac{1}{2}$, $11 = 9+2$, so ist

$$\sqrt{11} = 3\cdot\left\{1+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{9}-\frac{1}{2\cdot 4}\left(\frac{2}{9}\right)^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\left(\frac{2}{9}\right)^3-\ldots\right\}$$

woraus man den Werth von $\sqrt{11}$ leicht findet.

II. Nimmt man in (8) $x$ negativ, so ergiebt sich

$$(1-x)^\mu = 1-\frac{\mu}{1}x+\frac{\mu(\mu-1)}{1\cdot 2}x^2-\ldots \quad (4)$$

für negative $\mu$ und positive $x$ dagegen ist aus (8)

$$(1+x)^{-\mu} = 1-\frac{\mu}{1}x+\frac{\mu(\mu+1)}{1\cdot 2}x^2-\ldots \quad (5)$$

und wenn man auch noch $x$ negativ nimmt

$$\left.\begin{matrix}(1-x)^{-\mu} \\ = 1+\frac{\mu}{1}x+\frac{\mu(\mu+1)}{1\cdot 2}x^2+\frac{\mu(\mu+1)(\mu+2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3+\ldots\end{matrix}\right\} \quad (6)$$

Digitized by Google

Ein vielfach brauchbarer spezieller Fall hiervon tritt ein für $\mu = \frac{1}{2}$ und $x = z^2$, wo nun auch $z$ ein ächter Bruch sein mufs; man erhält:

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{1-z^2}} &= 1 + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}z^4 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}z^6 + \cdots \\ &+1 > z > -1\end{aligned}\right\} (7)$$

Aus Formel (6) läfst sich noch ein bemerkenswerthes Resultat ableiten. Man setze nämlich

$$x = \frac{z}{1+z}$$

wo nun $z$ jede beliebige positive Gröfse bedeuten kann, weil dann $x$ immer $< 1$ wird, so ist

$$(1-x)^{-\mu} = \left(\frac{1}{1+z}\right)^{-\mu} = (1+z)^{+\mu}$$

folglich

$$\left.\begin{aligned}(1+z)^{\mu} \\ = 1 + \frac{\mu}{1}\left(\frac{z}{1+z}\right) + \frac{\mu(\mu+1)}{1\cdot 2}\left(\frac{z}{1+z}\right)^2 + \frac{\mu(\mu+1)(\mu+2)}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{z}{1+z}\right)^3 + \cdots \\ +\infty > z > 0\end{aligned}\right\} (8)$$

Diese Formel ist defshalb sehr brauchbar, weil hier der Veränderlichen $z$ ein grofser Spielraum, nämlich das ganze Gebiet der positiven Gröfsen gelassen ist, und weil die Reihe für ganze negative $\mu$ abbricht, was bei den anderen Reihen für $(1+z)^{\mu}$ nicht der Fall ist.

## §. 31.

### Die wichtigsten Eigenschaften der Binomialcoeffizienten.

I. Eine bemerkenswerthe Eigenschaft der Binomialcoeffizienten ergiebt sich aus der Gleichung (7) des §. 27, wenn man $\alpha = \beta = n$ nimmt und berücksichtigt, dafs bei ganzen positiven $n$, $n_n = n_0$, $n_{n-1} = n_1$ u. s. f. ist. Man erhält

$$(2n)_n = (n_0)^2 + (n_1)^2 + (n_2)^2 + \cdots + (n_n)^2$$

eine Relation, die sich sehr einfach auch in Worte übersetzen läfst, wenn man bemerkt, dafs $(2n)_n$ der mittelste Binomialcoeffizient für $2n$ ist.

II. Setzt man in der Gleichung (8) des §. 29 $x = +1$, und bezeichnet die Coeffizienten hier analog mit $\mu_0$, $\mu_1$, $\mu_2$ etc., so ist nach §. 25 für alle positiven $\mu$ und solche negative, deren absoluter Werth unter der Einheit liegt,

$$2^{\mu} = \mu_0 + \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \cdots \qquad (1)$$



Digitized by Google

Für ganze positive $\mu = m$ hat man die endliche Reihe

$$2^m = m_0 + m_1 + m_2 + \ldots + m_{m-1} + m_m \qquad (2)$$

Nimmt man dagegen $x = -1$, so erhält man aus jener Formel für blos positive $\mu$ die Gleichung

$$0 = \mu_0 - \mu_1 + \mu_2 - \mu_3 + \ldots \qquad (3)$$

und für ganze positive $\mu = m$,

$$0 = m_0 - m_1 + m_2 - \ldots \mp m_{m-1} \pm m_m. \qquad (4)$$

Diese Gleichung leidet nur eine Ausnahme, nämlich für $m = 0$. Da $(1+x)^0 = 0_0 + 0_1 x + \ldots = 1$ ist, so folgt $0_0 = 1$, $0_1 = 0$, $0_2 = 0$ etc., folglich in diesem Falle die Summe der Reihe (4) $= 1$.

Die etwas zusammengesetztere Reihe

$$n_n m_n - (n+1)_n m_{n+1} + (n+2)_n m_{n+2} - \ldots$$

in der $m$ und $n$ ganze positive Zahlen bedeuten und die abbricht, wenn einer der Indices des $m$ selbst $= m$ geworden ist, läfst sich leicht mit Hülfe der Gleichung (4) summiren. Da nämlich überhaupt für ganze $p$ und $r$ die Relation $p_r = p_{p-r}$ existirt, so läfst sich die obige Reihe auch so schreiben

$$n_0 m_n - (n+1)_1 m_{n+1} + (n+2)_2 m_{n+2} - \ldots$$

Hier ist offenbar

$$n_0 = (m-n)_0$$

$$(n+1)_1 m_{n+1} = \frac{n+1}{1} \cdot \frac{m-n}{n+1} \cdot m_n = \frac{m-n}{1} m_n = (m-n)_1 m_n$$

$$(n+2) m_{n+2} = \frac{(n+2)(n+1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{(m-n)(m-n-1)}{(n+1)(n+2)} m_n = (m-n)_2 m_n$$

u. s. f.

folglich die fragliche Reihe auch

$$= m_n [(m-n)_0 - (m-n)_1 + (m-n)_2 - \ldots]$$

d. h. $= 0$, wenn $m > n$, und $= 1$, wenn $m = n$ ist. Wir haben also

$$\left.\begin{array}{l} n_n m_n - (n+1)_n m_{n+1} + (n+2)_n m_{n+2} - \ldots \\ = 0 \text{ für } m > n, \text{ und } = 1 \text{ für } m = n. \end{array}\right\} \qquad (5)$$

Wir werden später von dieser Summirung eine sehr nützliche Anwendung machen.

III. Auf ähnliche Weise wie die Gleichung (7) des §. 27 dadurch aus der Relation

$$(m+1)_p = m_p + m_{p-1} \text{ oder } (m+1)_p - m_p = m_{p-1} \qquad (6)$$

abgeleitet wurde, dafs $p$ veränderlich genommen wurde, kann man auch

Digitized by Google

noch eine zweite finden, wenn man $m$ veränderlich nimmt. Man setze nämlich $\alpha$ für $m$ und $n$ für $p$, so ist offenbar

$$\alpha_{n-1} = (\alpha + 1)_n - \alpha_n$$

Nimmt man $\alpha + 1$ für $\alpha$, so ist auch

$$(\alpha + 1)_{n-1} = (\alpha + 2)_n - (\alpha + 1)_n$$

und wenn man von dieser Gleichung die vorhergehende abzieht und Formel (6) für $m = \alpha$, $p = n - 1$ in Anwendung bringt,

$$\alpha_{n-2} = (\alpha + 2)_n - 2 \cdot (\alpha + 1)_n + \alpha_n$$

Ebenso ist $\alpha + 1$ für $\alpha$ gesetzt

$$(\alpha + 1)_{n-2} = (\alpha + 3)_n - 2 \cdot (\alpha + 2)_n + (\alpha + 1)_n$$

und durch Subtraktion der vorigen Gleichung von dieser unter Anwendung von Formel (6) für $m = \alpha$, $p = n - 2$,

$$\alpha_{n-3} = (\alpha + 3)_n - 3 \cdot (\alpha + 2)_n + 3 \cdot (\alpha + 1)_n - \alpha_n.$$

Man übersieht leicht, wie sich dieses Verfahren fortsetzen liefse und dafs die nach einander rechts erscheinenden Coeffizienten wieder die Binomialcoeffizienten sind. Bedeutet $\beta$ eine ganze positive Zahl, so ist allgemein

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_{n-\beta} \\ &= \beta_0 (\alpha + \beta)_n - \beta_1 (\alpha + \beta - 1)_n + \beta_2 (\alpha + \beta - 2)_n - \ldots \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

eine Relation, welche sich auf verschiedene Weisen spezialisiren liefse.

IV. Analog $m_p$ bezeichnet $\left(\frac{m}{2}\right)_p$ den $p$ten Coeffizienten, welcher zum Exponenten $\frac{m}{2}$ gehört. Derselbe ist

$$\frac{\frac{m}{2}\left(\frac{m}{2} - 1\right)\left(\frac{m}{2} - 2\right)\left(\frac{m}{2} - 3\right) \cdots \left(\frac{m}{2} - p + 1\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots p}$$

Multiplizirt man Zähler und Nenner mit $2^p$, so erhält man leicht

$$\left(\frac{m}{2}\right)_p = \frac{m\,(m-2)\,(m-4)\,(m-6)\ldots(m-2p+2)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (2p)}. \quad (8)$$

Von diesen Coeffizienten halber Exponenten gelten mehrere sehr merkwürdige Relationen, welche auf folgende Weise entstehen.

Sei $\mu$ eine ganz beliebige Gröfse, $n$ eine positive ganze Zahl und folgende Reihe

$$\left.\begin{aligned} &\mu_0 \left(\frac{\mu}{2}\right)_n + \mu_2 \left(\frac{\mu-2}{2}\right)_{n-1} + \mu_4 \left(\frac{\mu-4}{2}\right)_{n-2} + \cdots \\ &\cdots + \mu_{2n-2} \left(\frac{\mu-2n+2}{2}\right)_1 + \mu_{2n} \left(\frac{\mu-2n}{2}\right)_0 \end{aligned}\right\} \quad (9)$$



Digitized by Google

mit der Forderung gegeben, ihre Summe aufzufinden. Bezeichnet $r$ eine positive ganze Zahl, so ist ein beliebig aus der Reihe herausgegriffenes Glied von der Form

$$\mu_{2r}\left(\frac{\mu-2r}{2}\right)_{n-r} \qquad (10)$$

und wir können uns die Reihe selbst dadurch entstanden denken, dafs man hier successive $r=0,\ 1,\ 2,\ 3\ldots n$ setzt und alle hervorgehenden Gröfsen addirt. Entwickelt man den Werth jedes Faktors, so erhält man

$$\mu_{2r}\left(\frac{\mu-2r}{2}\right)_{n-r}$$
$$=\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-2r+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(2r)}\cdot\frac{(\mu-2r)(\mu-2r-2)\ldots(\mu-2n+2)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots(2n-2r)}$$

Im Zähler bilden hier diejenigen Faktoren, in welchen gerade Zahlen subtrahirt werden, nämlich

$$\mu,\ \mu-2,\ \mu-4,\ \ldots\ \mu-2r+2 \text{ und } \mu-2r,\ \mu-2r-4,\ \ldots\ \mu-2n+2,$$

eine fortlaufende Reihe und wir können daher das Produkt in folgender Form schreiben:

$$\frac{\mu(\mu-2)\ldots(\mu-2n+2)}{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2r-1)}\cdot\frac{(\mu-1)(\mu-3)\ldots(\mu-2r+1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots(2r)}\cdot\frac{1}{2\cdot 4\cdot 6\ldots(2n-2r)}.$$

Setzt man noch im Zähler und Nenner die Faktorenreihe

$$(2r+1)(2r+3)\ldots(2n-3)(2n-1)$$

zu, wodurch sich der Werth des Bruches nicht ändert, so erhält man im Nenner des ersten Faktors die ununterbrochene Reihe der ungeraden Zahlen von 1 bis $2n+1$, mithin:

$$\mu_{2r}\left(\frac{\mu-2r}{2}\right)_{n-r}=$$
$$\frac{\mu(\mu-2)\ldots(\mu-2n+2)}{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}\cdot\frac{(\mu-1)(\mu-3)\ldots(\mu-2r+1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots(2r)}\cdot\frac{(2n-1)(2n-3)\ldots(2r+1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots(2n-2r)}$$

Der erste dieser Faktoren ist von $r$ unabhängig; wir setzen daher der Kürze wegen

$$\frac{\mu(\mu-2)(\mu-4)\ldots(\mu-2n+2)}{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}=k \qquad (11)$$

Der zweite Faktor ist nichts Anderes als der Binomialcoeffizient $\left(\frac{\mu-1}{2}\right)_r$, wie man leicht durch Formel (8) prüft; schreibt man den dritten Faktor in der Form

Digitized by Google

$$\frac{(2n-1)(2n-1-2)\dots(2n-1-\overline{2n-2r}+2)}{2\,.\,4\,.\,6\dots(2n-2r)}$$

so erkennt man auch in ihm einen Binomialcoeffizienten, nämlich $\binom{2n-1}{2}_{n-r}$; es ist also

$$\mu_{2r}\binom{\mu-2r}{2}_{n-r} = k\binom{\mu-1}{2}_r\binom{2n-1}{2}_{n-r} \qquad (12)$$

Setzt man hier successive $r=0,\ 1,\ 2,\ \dots\ n$ und addirt alle entspringenden Gleichungen, so folgt, dafs die Reihe (9) gleich ist der nachstehenden

$$k\Big[\binom{\mu-1}{2}_0\binom{2n-1}{2}_n + \binom{\mu-1}{2}_1\binom{2n-1}{2}_{n-1} + \dots \\ \dots + \binom{\mu-1}{2}_n\binom{2n-1}{2}_0\Big]$$

Die eingeklammerte Reihe läfst sich aber nach Formel (6) des §. 29 summiren, wenn man dort $\alpha = \frac{2n-1}{2}$, $\beta = \frac{\mu-1}{2}$ setzt; ihre Summe ist $(\alpha+\beta)_n$ oder

$$\binom{\mu+2n-2}{2}_n = \frac{(\mu+2n-2)(\mu+2n-4)\dots(\mu+2)\mu}{2\,.\,4\,.\,6\dots(2n)}$$

Setzt man hierzu den Faktor $k$ seinem Werthe aus (11) nach, so findet man, dafs die Reihe (9) gleich ist dem Ausdrucke

$$\frac{\mu(\mu-2)(\mu-4)\dots(\mu-2n-2)}{1\,.\,3\,.\,5\dots(2n-1)}\cdot\frac{\mu(\mu+2)(\mu+4)\dots(\mu+2n-2)}{2\,.\,4\,.\,6\dots(2n)}$$

woraus die Gleichung folgt

$$\left.\begin{aligned}&\mu_0\binom{\mu}{2}_n + \mu_2\binom{\mu-2}{2}_{n-1} + \mu_4\binom{\mu-4}{2}_{n-2} + \dots \\ &\dots + \mu_{2n-2}\binom{\mu-2n+2}{2}_1 + \mu_{2n}\binom{\mu-2n}{2}_0 \\ &= \frac{\mu^2(\mu^2-2^2)(\mu^2-4^2)\dots(\mu^2-\overline{2n-2}^2)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\dots(2n)}\end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

V. Eine ganz ähnliche Transformation ist für die Summirung der Reihe

$$\left.\begin{aligned}&\mu_1\binom{\mu-1}{2}_n + \mu_3\binom{\mu-3}{2}_{n-1} + \dots \\ &\dots + \mu_{2n-1}\binom{\mu-2n+1}{2}_1 + \mu_{2n+1}\binom{\mu-2n-1}{2}_0\end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

nöthig. Ein allgemeines Glied derselben ist:

Digitized by Google

$$\left.\begin{aligned} &\mu_{2r+1}\left(\frac{\mu-2r-1}{2}\right)_{n-r} \\ &= \frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-2r)}{1.2.3\ldots(2r+1)}\cdot\frac{(\mu-2r-1)(\mu-2r-3)\ldots(\mu-2n+1)}{2.4.6\ldots(2n-2r)}\end{aligned}\right\}(15)$$

Im Zähler bilden hier diejenigen Faktoren, in denen ungerade Zahlen abgezogen werden, nämlich

$$\mu-1,\ \mu-3,\ \ldots\ \mu-2r+1$$

und $$\mu-2r-1,\ \mu-2r-3,\ \ldots\ \mu-2n+1$$

eine ununterbrochene Reihenfolge; wir können daher die rechte Seite der Gleichung (15) in folgende Form bringen:

$$\frac{\mu(\mu-1)(\mu-3)\ldots(\mu-2n+1)}{1.3.5\ldots(2r+1)}\cdot\frac{(\mu-2)(\mu-4)\ldots(\mu-2r)}{2.4.6\ldots(2r)}\cdot\frac{1}{2.4.6\ldots(2n-2r)}$$

Setzt man noch im Zähler und Nenner die Faktorenreihe

$$(2r+3)(2r+5)\ldots(2n-1)(2n+1)$$

zu, so ist der obige Ausdruck gleich dem folgenden

$$\frac{\mu(\mu-1)(\mu-3)\ldots(\mu-2n+1)}{1.3.5\ldots(2n+1)}\cdot\frac{(\mu-2)(\mu-4)\ldots(\mu-2r)}{2.4.6\ldots(2r)}\cdot\frac{(2n+1)(2n-1)\ldots(2r+3)}{2.4.6\ldots(2n-2r)}$$

in welchem der erste Faktor von $r$ unabhängig ist und mit $k$ bezeichnet werden mag. Schreibt man die anderen beiden Faktoren in folgenden Formen:

$$\frac{(\mu-2)(\mu-2-2)\ldots(\mu-2-2r+2)}{2.4.6\ldots 2r}$$

und

$$\frac{(2n+1)(2n+1-2)\ldots(2n+1-\overline{2n-2r}+2)}{2.4.6\ldots(2n-2r)}$$

so erkennt man in ihnen die Binomialcoeffizienten $\left(\frac{\mu-2}{2}\right)_r$ und $\left(\frac{2n+1}{2}\right)_{n-r}$; folglich ist

$$\mu_{2r+1}\left(\frac{\mu-2r-1}{2}\right)_{n-r} = k\left(\frac{\mu-2}{2}\right)_r\left(\frac{2n+1}{2}\right)_{n-r}$$

Setzt man successive $r=0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ n$ und addirt alle so entstehenden Glieder, so findet man, dafs die Reihe (14) gleich ist der folgenden

$$k\left[\left(\frac{\mu-2}{2}\right)_0\left(\frac{2n+1}{2}\right)_n+\left(\frac{\mu-2}{2}\right)_1\left(\frac{2n+1}{2}\right)_{n-1}+\cdots\right.$$
$$\left.\cdots+\left(\frac{\mu-2}{2}\right)_n\left(\frac{2n+1}{2}\right)_0\right]=k\left(\frac{\mu-2+2n+1}{2}\right)_n$$

Digitized by Google

woraus man durch Entwickelung des zweiten Faktors und Substitution des Werthes von $k$ findet:

$$\left.\begin{aligned}&\mu_1\left(\frac{\mu-1}{2}\right)_n+\mu_3\left(\frac{\mu-3}{2}\right)_{n-1}+\cdots\\&\cdots+\mu_{2n-1}\left(\frac{\mu-2n+1}{2}\right)_1+\mu_{2n+1}\left(\frac{\mu-2n-1}{2}\right)_0\\&=\frac{\mu(\mu^2-1^2)(\mu^2-3^2)\ldots(\mu^2-\overline{2n-1}^2)}{1\cdot2\cdot3\cdot4\ldots(2n+1)}\end{aligned}\right\}\quad(16)$$

VI. Man bemerkt ebenso leicht, dafs

$$\mu_{2r}\left(\frac{\mu-2r-1}{2}\right)_{n-r}$$
$$=\frac{(\mu-1)(\mu-3)\ldots(\mu-2n+1)}{1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)}\left(\frac{\mu}{2}\right)_r\left(\frac{2n-1}{2}\right)_{n-r}$$

ist, und hieraus findet man, wenn $r=0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ n$ gesetzt und Alles addirt wird,

$$\left.\begin{aligned}&\mu_0\left(\frac{\mu-1}{2}\right)_n+\mu_2\left(\frac{\mu-3}{2}\right)_{n-1}+\mu_4\left(\frac{\mu-5}{2}\right)_{n-2}+\cdots\\&\cdots+\mu_{2n}\left(\frac{\mu-2n-1}{2}\right)_0=\frac{(\mu^2-1^2)(\mu^2-3^2)\ldots(\mu^2-\overline{2n-1}^2)}{1\cdot2\cdot3\ldots(2n)}\end{aligned}\right\}\quad(17)$$

Aus der Gleichung

$$\mu_{2r+1}\left(\frac{\mu-2r-2}{2}\right)_{n-r}$$
$$=\frac{\mu(\mu-2)(\mu-4)\ldots(\mu-2n)}{1\cdot3\cdot5\ldots(2n+1)}\left(\frac{\mu-1}{2}\right)_r\left(\frac{2n+1}{2}\right)_{n-r}$$

ergiebt sich endlich noch für $r=0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ n$ und Addition aller entstehenden Glieder

$$\left.\begin{aligned}&\mu_1\left(\frac{\mu-2}{2}\right)_n+\mu_3\left(\frac{\mu-4}{2}\right)_{n-1}+\mu_5\left(\frac{\mu-6}{2}\right)_{n-2}+\cdots\\&\cdots+\mu_{2n+1}\left(\frac{\mu-2n-2}{2}\right)_0=\frac{\mu(\mu^2-2^2)(\mu^2-4^2)\ldots(\mu^2-\overline{2n}^2)}{1\cdot2\cdot3\ldots(2n+1)}\end{aligned}\right\}\quad(18)$$

Von diesen vier letzten Gleichungen (13), (16), (17) und (18) werden wir später eine wichtige Anwendung machen.

Digitized by Google

# Capitel VI.
# Die Exponenzialreihe.

## §. 32.
### Ableitung derselben aus der Binomialreihe.

Wie schon früher erwähnt wurde, giebt die Potenz zu zwei verschiedenen Funktionsformen Veranlassung, je nachdem man die Grundzahl oder den Exponenten als veränderliche Gröfse ansieht. Für die erste zeigt der binomische Satz die nöthigen Relationen; dergleichen nun auch für die Exponenzialreihe zu entwickeln, mufs jetzt unsere Aufgabe sein. Man bemerkt hier leicht, dafs dieselbe im Grunde auf das Binomialtheorem zurückkommt; denn setzt man in demselben für die zweitheilige Gröfse $1+x$ eine Constante $b$, also $x=b-1$, und für den constanten Exponenten $\mu$ einen veränderlichen $z$, so wird

$$b^z = 1 + \frac{z}{1}(b-1) + \frac{z(z-1)}{1.2}(b-1)^2 + \frac{z(z-1)(z-2)}{1.2.3}(b-1)^3 + \ldots \quad (1)$$

und hiermit wäre die Aufgabe eigentlich schon gelöst. Diese Lösung leidet aber an zwei hauptsächlichen Mängeln; der erste besteht darin, dafs mit der Veränderlichen $z$ hier sehr verwickelte Operationen vorgenommen werden müssen, und der zweite darin, dafs die Gleichung nur so lange richtig bleibt, als $b-1$ (das frühere $x$) zwischen den Gränzen $-1$ und $+1$, folglich $b$ selbst zwischen 0 und 2 bleibt. Wir hätten nun diese Mängel zu beseitigen.

Um zunächst die Reihe (1) in eine, in Beziehung auf die mit $z$ vorzunehmenden Operationen, einfachere Form zu bringen, könnten wir versuchen, ob sich dieselbe nicht nach Potenzen von $z$ ordnen, also auf die Form

$$1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + \ldots$$

bringen liefse. Wollten wir diefs durch wirkliche Ausführung der angedeuteten Multiplikationen leisten, so würden wir in eine ganz endlose Arbeit gerathen, weil jedes nächstfolgende Glied mehr Potenzen von $z$ liefert, als das vorhergehende. Die Schwierigkeit liegt also vorzüglich darin, dafs nicht blose $z$, sondern die zweitheiligen Gröfsen $z-1$, $z-2$, $z-3$ u. s. f. als Faktoren auftreten. Wäre es aber möglich, die in den Faktoren successive abgezogenen Zahlen 1, 2, 3 u. s. f. zum Verschwin-

Digitized by Google

den zu bringen, so würden blose $z$ als Faktoren übrig bleiben und ihre Produkte die successiven Potenzen von $z$ bilden. Wollen wir nun in einem Produkte wie

$$z(z-1)\ (z-2)\ (z-3)\ \ldots\ (z-n) \qquad (2)$$

die Zahlen 1, 2, 3, ... $n$ zum Verschwinden bringen, so können wir diefs auf keine andere Weise erlangen, als dadurch, dafs wir diesen Zahlen Faktoren geben, welche wir dann bis zur Null abnehmen lassen. Könnten wir nämlich das obige Produkt in das folgende transformiren:

$$x\,(x-\delta)\ (x-2\delta)\ (x-3\delta)\ \ldots\ (x-n\delta) \qquad (3)$$

in welchem $x$ eine neue Veränderliche und $\delta$ eine beliebige Gröfse bezeichnet, so würden wir durch Abnehmenlassen des $\delta$ bis zur Gränze 0 auf die Form $x\,.\,x\,.\,x\,.\,x\,\ldots\,x$, d. h. auf $x^{n+1}$ kommen. Es ist aber sehr leicht, diesen Gedanken auszuführen; denn wenn man berücksichtigt, dafs der Ausdruck in (3) gleich ist dem folgenden

$$\frac{x}{\delta}\left(\frac{x}{\delta}-1\right)\left(\frac{x}{\delta}-2\right)\left(\frac{x}{\delta}-3\right)\ldots\left(\frac{x}{\delta}-n\right)\delta^{n+1}$$

so bemerkt man gleich, dafs man die Form (3) aus (2) dadurch ableiten kann, dafs man in (2) $z=\frac{x}{\delta}$ setzt und dann mit $\delta^{n+1}$ multiplizirt.

Nehmen wir also in der Gleichung (1) $z=\frac{x}{\delta}$, so wird

$$b^{\frac{x}{\delta}} = 1+\frac{\frac{x}{\delta}}{1}(b-1)+\frac{\frac{x}{\delta}\left(\frac{x}{\delta}-1\right)}{1\,.\,2}(b-1)^2+\frac{\frac{x}{\delta}\left(\frac{x}{\delta}-1\right)\left(\frac{x}{\delta}-2\right)}{1\,.\,2\,.\,3}(b-1)^3+\ldots$$

Ein allgemeines Glied wäre hier

$$\frac{\frac{x}{\delta}\left(\frac{x}{\delta}-1\right)\left(\frac{x}{\delta}-2\right)\ldots\left(\frac{x}{\delta}-n\right)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots(n+1)}(b-1)^{n+1}$$

Multiplizirt man Zähler und Nenner mit $\delta^{n+1}$, wodurch sich der Werth des Bruches nicht ändert, so verwandelt sich derselbe in den folgenden:

$$\frac{x\,(x-\delta)\ (x-2\delta)\ldots(x-n\delta)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots(n+1)}\left(\frac{b-1}{\delta}\right)^{n+1}$$

mithin erhalten wir jetzt aus der vorigen Reihe die neue:

$$b^{\frac{x}{\delta}} = 1+\frac{x}{1}\left(\frac{b-1}{\delta}\right)+\frac{x(x-\delta)}{1\,.\,2}\left(\frac{b-1}{\delta}\right)^2+\frac{x(x-\delta)(x-2\delta)}{1\,.\,2\,.\,3}\left(\frac{b-1}{\delta}\right)^3+\ldots \qquad (4)$$

Digitized by Google

Durch diese Transformation allein ist aber noch nicht viel gewonnen. Lassen wir nämlich $\delta$ bis zur Gränze Null abnehmen, so gehen wohl die Produkte $x(x-\delta)$, $x(x-\delta)$, $(x-2\delta)$ u. s. f. in $x^2$, $x^3$ etc. über, aber es wird auch $Lim\ \frac{b-1}{\delta} = \infty$ und links $Lim\ b^{\frac{x}{\delta}} = \infty$, folglich reduzirt sich die Gleichung auf das triviale Resultat $\infty = \infty$. Da wir aber links eine Exponenzialgröfse und nicht $\infty$ erhalten wollten, so müssen wir das $\delta$, welches die Ursache von dem beständigen Wachsen der Gröfse $b^{\frac{x}{\delta}}$ ist, wieder wegzuschaffen suchen. Diefs geschieht sehr leicht durch die Substitution $b = a^{\delta}$. Hierdurch wird

$$a^x = 1 + \frac{x}{1}\left(\frac{a^{\delta}-1}{\delta}\right) + \frac{x(x-\delta)}{1.2}\left(\frac{a^{\delta}-1}{\delta}\right)^2 + \frac{x(x-\delta)(x-2\delta)}{1.2.3}\left(\frac{a^{\delta}-1}{\delta}\right)^3 + \ldots \quad (5)$$

Wir hätten nun noch den zweiten der erwähnten Mängel zu beseitigen. Die Gleichung (2) gilt für jedes $z$ nur dann, wenn $b$ zwischen 0 und 2 liegt; es wäre daher noch die Aufgabe, eine solche Substitution für $b$ zu treffen, dafs diese Bedingung aufgehoben, oder wenigstens bedeutend erweitert würde. Diefs ist aber in der That schon geschehen, als $b = a^{\delta}$ gesetzt worden war. Denn da $\delta$ immer abnehmen soll, so wird $a^{\delta}$ der positiven Einheit so nahe kommen, als man nur irgend will, vorausgesetzt, dafs $a$ positiv ist, mithin $b = a^{\delta}$ immer zwischen 0 und 2 liegen; oder, was das Nämliche ist, die Bedingungsgleichung für (1), nämlich $2 > b > 0$, verwandelt sich in $2 > a^{\delta} > 0$, d. i. in $2^{\frac{1}{\delta}} > a > 0$, welches jetzt die Bedingungsgleichung für (5) ist.

Lassen wir nun in der Gleichung (5) $\delta$ immer abnehmen, so wird der Ausdruck

$$\frac{a^{\delta}-1}{\delta}$$

dessen Potenzen in der Reihe erscheinen, unbestimmt, indem er sich für $\delta = 0$ auf das vieldeutige Symbol $\frac{0}{0}$ reduzirt. Indessen können wir doch zum voraus wissen, dafs die Gränze, welcher sich $\frac{a^{\delta}-1}{\delta}$ nähert, eine bestimmte endliche Gröfse sein müsse. Denn da aus dem Vorigen klar ist, dafs die Bedingungen erfüllt sind, unter welchen die Reihe (1) con-

Digitized by Google

vergirt, so mufs auch die Reihe (5) in jedem Falle convergiren, und diefs würde nicht statt finden, wenn sich $\frac{a^\delta - 1}{\delta}$ nicht einer bestimmten endlichen Gröfse als Gränze näherte. Ohne uns nun vor der Hand weiter um dieselbe zu bekümmern, wollen wir dieselbe mit $k$ bezeichnen und zusehen, was daraus folgt. Durch Übergang zur Gränze für abnehmende $\delta$, also $\delta = 0$, erhalten wir jetzt aus (5) die Reihe

$$a^x = 1 + \frac{x}{1}k + \frac{x^2}{1.2}k^2 + \frac{x^3}{1.2.3}k^3 + \cdots \qquad (6)$$

und die Bedingung für ihre Gültigkeit ist $Lim\ 2^{\frac{1}{\delta}} > a > 0$, d. h. sie gilt für alle positiven $a$. Man bemerkt leicht, dafs diese Reihe eine unendliche sein müsse. Entweder nämlich geht $\delta$ nicht in einem bestimmten Werthe von $x$ auf und dann ist das entsprechende $z = \frac{x}{\delta}$ ein Bruch und folglich die Reihe (1), mithin auch die daraus abgeleitete (6) unendlich. Wenn aber $\delta$ so beschaffen wäre, dafs es trotz seines unendlichen Abnehmens immer in einem bestimmten Werthe von $x$ aufginge (z. B. für $x = 6$, $\delta = \frac{2}{m}$, wo $m$ eine ins Unendliche wachsende ganze Zahl bedeutet), so wäre $z$ eine ganze Zahl und die Gliederanzahl der Reihe (1) $= z + 1$, d. i. $= \frac{x}{\delta} + 1$. Bei dem unendlichen Abnehmen von $\delta$ nimmt aber diese Gliederanzahl beständig zu und folglich ist auch in diesem Falle die Reihe (6) eine unendliche.

Um noch den Werth von $k$ zu finden, müfste man diese Gröfse von der rechten Seite wegschaffen und auf die linke transponiren. Diefs geschieht leicht durch die Substitution $x = \frac{1}{k}$, welche defswegen erlaubt ist, weil $x$ eine beliebige Gröfse, $k$ aber eine bestimmte Constante bedeutet, folglich unter all den unendlich verschiedenen Werthen von $x$ auch der $\frac{1}{k}$ vorkommen mufs. Man erhält hierdurch

$$a^{\frac{1}{k}} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \cdots \qquad (7)$$

Die Summe dieser unendlichen Reihe ist die schon früher erwähnte Zahl 2,7182818..., die man immer mit $e$ bezeichnet. Wir haben folglich

$$a^{\frac{1}{k}} = e$$

Digitized by Google

und diefs ist eine gewöhnliche sogenannte logarithmische Gleichung. Nimmt man beiderseits die Logarithmen in irgend einem Systeme, so ergiebt sich

$$k = \frac{log\, a}{log\, e} \qquad (8)$$

wodurch der Werth der Constante $k$ bestimmt ist. Da es der Willkühr überlassen bleibt, in welchem Systeme der Logarithmus genommen wird, so können wir auch $a$ oder $e$ als Basis des Systemes nehmen. Im ersten Falle wird dann $log\, a = 1$, folglich $k = \frac{1}{log\, e}$ und hierdurch geht die Gleichung (6) in die folgende über:

$$a^x = 1 + \frac{1}{1}\left(\frac{x}{log\, e}\right) + \frac{1}{1.2}\left(\frac{x}{log\, e}\right)^2 + \frac{1}{1.2.3}\left(\frac{x}{log\, e}\right)^3 + \cdots \qquad (9)$$

Dieses Resultat ist defswegen von Bedeutung, weil es zu einem gegebenen Logarithmus die Zahl finden lehrt. Setzen wir nämlich $a^x = y$, so folgt $x = log\, y$, $(bas\ a)$, folglich

$$y = 1 + \frac{1}{1}\left(\frac{log\, y}{log\, e}\right) + \frac{1}{1.2}\left(\frac{log\, y}{log\, e}\right)^2 + \frac{1}{1.2.3}\left(\frac{log\, y}{log\, e}\right)^3 + \cdots \qquad (10)$$

Nimmt man dagegen in der Gleichung (8) $e$ als Basis des logarithmischen Systemes und bezeichnen die Logarithmen desselben kurz mit $l$, so wird $k = la$ und aus (6)

$$a^x = 1 + \frac{x\, la}{1} + \frac{(x\, la)^2}{1.2} + \frac{(x\, la)^3}{1.2.3} + \cdots \qquad (11)$$

welche Form meistens bequemer als die in (9) gegebene ist, obgleich hier der natürliche Logarithmus $la$ vorkommt.

Setzt man noch $a = e$ selbst, so wird $le = 1$, folglich sehr einfach

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \cdots \qquad (12)$$

und für $e^x = y$, woraus $x = ly$ folgt,

$$y = 1 + \frac{ly}{1} + \frac{(ly)^2}{1.2} + \frac{(ly)^3}{1.2.3} + \cdots \qquad (13)$$

welche Formel die Zahl finden lehrt, wenn ihr natürlicher Logarithmus gegeben ist. Man sieht jetzt auch den Grund der Benennung natürlicher Logarithmus. Die Zahl $e$ mufs man nämlich kennen, wenn man zum künstlichen Logarithmus einer Zahl die Zahl selbst finden will (nach (10)), es ist daher am natürlichsten, die Zahl $e$ selbst zur Basis eines Systemes zu machen, weil dann die Formel (10) sich am einfachsten gestaltet und in (13) übergeht. Die Reihe (12), welche in der Analysis

Digitized by Google

eine sehr wichtige Rolle spielt, führt gewöhnlich den Namen der Exponenzialreihe.

## §. 33.

### Andere Ableitungen der Exponenzialreihe.

I. Es ist nach dem Binomialtheorem für jedes $x$

$$\left.\begin{aligned}&\left(1+\frac{x}{m}\right)^m\\ &=1+\frac{m}{1}\left(\frac{x}{m}\right)+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}\left(\frac{x}{m}\right)^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{x}{m}\right)^3+\cdots\\ &=1+\frac{1}{1}x+\frac{1-\frac{1}{m}}{1\cdot 2}x^2+\frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3+\cdots\end{aligned}\right\}(14)$$

Ein allgemeines Glied dieser Reihe wäre

$$\frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\left(1-\frac{3}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{n}{m}\right)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(n+1)}x^{n+1}$$

Lassen wir hier $m$ ins Unendliche wachsen, so kann $m$ beliebig vielmal gröfser als $n$ gemacht, also $\frac{n}{m}$ so klein gemacht werden, als irgend verlangt wird. Dasselbe gilt auch von den vorhergehenden Brüchen $\frac{n-1}{m}$, $\frac{n-2}{m}$, $\cdots$ $\frac{2}{m}$, $\frac{1}{m}$. Es ist also für ins Unendliche wachsende $m$

$$Lim\,\frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{n}{m}\right)}{1\cdot 2\cdots(n+1)}x^{n+1}=\frac{x^{n+1}}{1\cdot 2\cdots(n+1)}$$

Gehen wir nun in der Gleichung (14) zur Gränze für wachsende $m$ über, so wird

$$Lim\left(1+\frac{x}{m}\right)^m=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1\cdot 2}+\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots \quad (15)$$

und diese Reihe ist jetzt eine unendliche, weil die Gliederanzahl in (14) $m+1$ war und $m$ ins Unendliche gewachsen ist.

Um nun den Werth von $Lim\left(1+\frac{x}{m}\right)^m$ zu finden, setzen wir erst $x=1$; aus (15) ergiebt sich in diesem Falle

$$Lim\left(1+\frac{1}{m}\right)^m=e \quad (16)$$

Offenbar ist nun auch

Digitized by Google

$$Lim \left(1 + \frac{1}{\frac{m}{x}}\right)^{\frac{m}{x}} = e$$

weil $\frac{m}{x}$ ebenso gut eine ins Unendliche wachsende Gröfse ist als $m$ selbst. Nun ist ferner

$$\left(1 + \frac{x}{m}\right)^m = \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{m}{x}}\right)^{\frac{m}{x}}\right]^x$$

mithin für unbegränzt wachsende $m$

$$Lim \left(1 + \frac{x}{m}\right)^m = e^x \qquad (17)$$

wodurch die Summe der Reihe (15) gefunden ist. Setzt man noch $\frac{1}{m} = \delta$, so kann man statt der vorigen Gleichung auch sagen: für ein bis zur Null abnehmendes $\delta$ ist

$$Lim\ (1 + \delta x)^{\frac{1}{\delta}} = e^x \qquad (18)$$

was öfter angewendet wird.

Der Gleichung (17) läfst sich eine sehr anschauliche Seite abgewinnen, wenn man die Lehre von den zusammengesetzten Interessen mit ihr verknüpft. Bezeichnen wir nämlich mit $p$ die Interessen eines Thalers für ein Jahr, so ist bei einfachen Interessen das Kapital 1 in einem Jahre auf $1 + p$ angewachsen. Werden dagegen die Interessen in Terminen von $\frac{1}{m}$ Jahr zum Kapital geschlagen und mit verzinst, so ist der Werth des Kapitales 1 am Ende des ersten $m$tel Jahres $= 1 + \frac{p}{m}$, am Ende des zweiten $m$tel $= \left(1 + \frac{p}{m}\right)^2$, am Ende des dritten $m$tels $= \left(1 + \frac{p}{m}\right)^3$ u. s. f., also am Ende des ganzen aus $m$ gleichen Theilen bestehenden Jahres

$$= \left(1 + \frac{p}{m}\right)^m$$

wie man leicht durch ganz einfache Betrachtungen findet. Läfst man nun $m$ beständig wachsen, so werden die einzelnen Termine immer mehr und die Zeiten zwischen ihnen immer kleiner, man nähert sich also immer mehr einer stetigen Aufeinanderfolge der Termine. Geht man zur

Digitized by Google

Gränze für wachsende $m$ über, so erhält man nach Formel (17) $e^p$ als Werth des Kapitals am Ende des Jahres, wenn stetig nach einander in jedem Augenblicke die gewonnenen Interessen zum Kapitale geschlagen und gleich wieder mit verzinst werden. Man kann daher auch sagen: Eine Gröfse, welche in einer gewissen Zeit bei einfachem Wachsthum von 1 bis $1+p$ zunimmt, wächst in derselben Zeit auf $e^p$ an, wenn das Wachsthum so geschieht, dafs in stetiger Folge jeder bereits erzeugte Theil gleichmäfsig wieder neue Theile mit erzeugen hilft. Das Erste entspräche etwa einer unorganischen Anhäufung, das Zweite einem organischen Prozesse.

Eine andere sehr elegante Ableitung der Gleichung (12) ist folgende. Man bezeichne mit $f(x)$ die unbekannte Summe der für jedes $x$ convergenten Reihe

$$1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}+\cdots \text{ in inf.}$$

dann ist entsprechend

$$f(y)=1+\frac{y}{1}+\frac{y^2}{1.2}+\frac{y^3}{1.2.3}+\cdots \qquad (19)$$

Multiplizirt man beide Gleichungen mit einander, so erhält man

$$f(x)\cdot f(y)=1+\frac{x}{1}+\frac{y}{1}$$
$$+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x}{1}\cdot\frac{y}{1}+\frac{y^2}{1.2}$$
$$+\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^2}{1.2}\cdot\frac{y}{1}+\frac{x}{1}\cdot\frac{y^2}{1.2}+\frac{y^3}{1.2.3}$$

u. s. f.

Bezeichnet man die einzelnen von $x$ und $y$ abhängigen Horizontalreihen mit $t_1, t_2, t_3, \ldots$, so ist

$$f(x)\cdot f(y)=1+t_1+t_2+t_3+\cdots \qquad (20)$$

und

$$t_n=\frac{x^n}{1.2\ldots n}+\frac{x^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}\cdot\frac{y}{1}+\frac{x^{n-2}}{1.2\ldots(n-2)}\cdot\frac{y^2}{1.2}+\cdots$$
$$\cdots+\frac{x}{1}\cdot\frac{y^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}+\frac{y^n}{1.2.3\ldots n}$$

Diefs läfst sich in folgende Form bringen

$$t_n=\frac{1}{1.2\ldots n}\left[x^n+\frac{n}{1}x^{n-1}y+\frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2}y^2+\cdots+y^n\right]$$

d. i. nach dem Binomialtheorem für ganze positive Exponenten

Digitized by Google

$$t_n = \frac{(x+y)^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n}$$

Hiernach wird aus der Gleichung (20) die folgende

$$f(x) \cdot f(y) = 1 + \frac{x+y}{1} + \frac{(x+y)^2}{1 \cdot 2} + \frac{(x+y)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots$$

d. i. wenn man sich an die Bedeutung von $f(x)$ erinnert,

$$f(x) \cdot f(y) = f(x+y).$$

Daraus folgt nach §. 12

$$f(x) = [f(1)]^x$$

Vermöge der Bedeutung von $f(x)$ ist aber

$$f(1) = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots = e$$

mithin $f(x) = e^x$, oder

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots \qquad (21)$$

wie in der Gleichung (12).

Hieraus kann man auch rückwärts wieder die Gleichung (11) ableiten, wenn man bemerkt, dafs $e^{la} = a$, folglich $a^x = (e^{la})^x = e^{x\,la}$ ist und nun $x\,la$ an die Stelle von $x$ in die Gleichung (21) setzt. Nimmt man in $e^{la} = a$ beiderseits die Logarithmen des Systemes $a$, so folgt $la \,.\, log\, e = 1$, folglich $la = \frac{1}{log\, e}$ und dadurch erhält man aus (11) wieder die mit (9) bezeichnete Gleichung.

---

## Capitel VII.

## Die logarithmischen Reihen.

### §. 34.

**Ableitung einer logarithmischen Reihe aus dem Binomialtheorem.**

Wir haben in der Exponenzialreihe die Auflösung der Aufgabe gefunden, für ein gegebenes logarithmisches System die Zahl zu bestimmen, welche zu einem gegebenen Logarithmus gehört. Es liegt uns nun ob, auch die umgekehrte Aufgabe zu lösen, nämlich zu zeigen, wie man zu einer gegebenen Zahl den Logarithmus irgend eines Systemes findet. Wir

Digitized by Google

stützen uns hierbei auf eine Eigenschaft des Logarithmus, welche wir im vorigen Capitel kennen gelernt haben und die darin besteht, dafs die mit $k$ bezeichnete Gränze, welcher sich der Ausdruck

$$\frac{a^\delta - 1}{\delta}$$

für abnehmende $\delta$ nähert, durch Logarithmen ausgedrückt werden kann. Es ist nämlich vermöge der Bedeutung und des später gefundenen Werthes von $k$

$$Lim\ \frac{a^\delta - 1}{\delta} = \frac{log\ a}{log\ e}$$

wobei die Logarithmen in einem beliebigen Systeme genommen werden können. Nehmen wir sie als natürliche, wie schon einmal geschah, so wird

$$Lim\ \frac{a^\delta - 1}{\delta} = la. \qquad (1)$$

Hier könnte man nun $a^\delta$ durch eine Reihe darstellen, entweder mit Hülfe der Exponenzialreihe oder durch das Binomialtheorem. Das Erste würde zu einer blosen Identität führen und wir versuchen daher das Zweite. Zu diesem Zwecke wollen wir aber erst eine zweitheilige Gröfse an die Stelle des $a$ setzen und nehmen daher $a = 1 + x$, wodurch

$$l(1+x) = Lim\ \frac{(1+x)^\delta - 1}{\delta} \qquad (2)$$

wird. Nun ist aber für $+1 > x > -1$

$$\frac{(1+x)^\delta - 1}{\delta}$$

$$= \frac{1}{1}x + \frac{\delta-1}{1.2}x^2 + \frac{(\delta-1)(\delta-2)}{1.2.3}x^3 + \frac{(\delta-1)(\delta-2)(\delta-3)}{1.2.3.4}x^4 + \ldots$$

folglich, wenn wir $\delta$ bis zur Gränze Null abnehmen lassen,

$$Lim\ \frac{(1+x)^\delta - 1}{\delta}$$

$$= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \ldots$$

und diese Reihe ist eine unendliche, weil der Werth, den wir für $\mu$ in die Binomialreihe gesetzt haben, keine positive ganze Zahl, sondern ein beständig abnehmender ächter Bruch war. Die Reihe selbst gilt so lange, als $x$ zwischen $+1$ und $-1$ liegt. Da aber $\delta$, d. i. das frühere $\mu$, nur positive Werthe bekommen hat, so bleibt die Reihe nach §. 25 auch für



Digitized by Google

$x = \pm 1$ der linken Seite identisch. Vergleichen wir nun das obige Resultat mit der Gleichung (2), so können wir sagen: so lange $x$ die Gränzen $+1$ und $-1$ nicht überschreitet, ist

$$l(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \ldots \qquad (3)$$

Für $x = +1$ erhält man den Werth von $l2$, nämlich

$$l2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots \qquad (4)$$

wobei die Reihe rechts noch convergirt. Für $x = -1$ wird die Reihe in (3) divergent und hat keine endliche Summe; in der That ist auch $l(0)$ keine angebbare Gröfse, weil die Logarithmen von ächten Brüchen über alle Gränze hinaus als negative Gröfsen wachsen, wenn die zugehörigen Brüche sich unbegränzt der Null nähern.

Für negative $x$ hat man aus (3)

$$l(1-x) = -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 - \ldots \qquad (5)$$

Nimmt man noch

$$x = \frac{z}{z+1}$$

wo nun $x$ immer ein ächter Bruch ist, sobald $z$ eine positive Gröfse bezeichnet, so erhält man unter der Bemerkung, dafs

$$l\left(1 - \frac{z}{z+1}\right) = l\left(\frac{1}{z+1}\right) = -l(1+z)$$

ist, für alle positiven $z$ die Gleichung

$$l(1+z) = \left\{ \frac{z}{1+z} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{1+z}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{z}{1+z}\right)^3 + \ldots \right\} \qquad (6)$$

die man mittelst der Gleichung (2) auch unmittelbar aus der Formel (8) in §. 30 hätte ableiten können.

Hiermit wäre das Problem gelöst, zu jeder Zahl den natürlichen Logarithmus zu berechnen. Für alle Zahlen unter 1 dient die Formel (5) und für alle über 1 die Gleichung (6). Natürliche Logarithmen negativer Zahlen giebt es nicht, weil man $e$ nicht auf eine solche Potenz erheben kann, dafs eine negative Zahl herauskäme; also erschöpfen die Reihen in (5) und (6) schon alle Fälle. Wollte man in (5) $x$ gröfser als 1 nehmen, so würde die Reihe rechts divergiren, während links etwas geradezu Unmögliches stünde. Da aber die Reihe lauter mögliche Gröfsen enthält, so

Digitized by Google

ist auch ihre Summe, wenn auch ins Unendliche wachsend, doch möglich, obschon nicht angebbar. Es müfste also etwas Mögliches einem Unmöglichen gleich sein, woraus man sieht, dafs bei divergenten Reihen sich das Band des Gleichheitszeichens löst.

Es lassen sich aus den bisherigen Reihen noch einige andere für praktische Berechnung bequemere ableiten, die aber auch theoretisch von Interesse sind.

## §. 35.

### Anderweite Reihen zur Berechnung der Logarithmen.

I. Durch Subtraktion der Gleichung (5) von (3) und nachherige Division mit 2 erhält man für $x < 1$

$$\frac{1}{2} l \frac{1+x}{1-x} = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{7}x^7 + \cdots \qquad (7)$$

Nimmt man hier

$$x = \frac{z-1}{z+1}$$

wenn für jedes beliebige positive $z$ die Bedingung $x < 1$ erfüllt ist, so ergiebt sich leicht

$$\frac{1}{2} lz = \frac{z-1}{z+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^5 + \cdots \qquad (8)$$

Setzt man noch $z^2$ für $z$, so wird

$$\frac{1}{2} l(z^2) = \frac{z^2-1}{z^2+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{z^2-1}{z^2+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{z^2-1}{z^2+1}\right)^5 + \cdots \qquad (9)$$

Hier sind zwei Fälle zu unterscheiden; nämlich ob $z$ positiv oder negativ ist. Im ersten kann man $2lz$ für $l(z^2)$ setzen und dann hat man

$$lz = \frac{z^2-1}{z^2+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{z^2-1}{z^2+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{z^2-1}{z^2+1}\right)^5 + \cdots \qquad (10)$$

ist aber $z$ negativ, steht also $-z$ für $z$, so darf man nicht etwa schliefsen, $l(\overline{-z}^2) = 2\,l(-z)$, sonst würde man auf ein total falsches Resultat kommen. Man erhielte nämlich

$$l(-z) = \frac{z^2-1}{z^2+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{z^2-1}{z^2+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{z^2-1}{z^2+1}\right)^5 + \cdots$$

und hieraus würde folgen, dafs $l(-z) = l(+z)$ wäre. Der Grund dieses Fehlers ist einfach der: $lz$ und $\frac{1}{2}\,l(z^2)$ sind ganz verschiedene Funktionen von $z$, die wohl für positive Werthe von $z$ übereinstimmen, aber



Digitized by Google

nicht für negative; im letzteren Falle existirt nämlich die erste Funktion gar nicht mehr, während die zweite dann die nämlichen Werthe giebt wie für gleichgrofse positive $z$. Construirt man beide Funktionen geometrisch, so hat die der ersten Funktion entsprechende Curve nur einen Zweig, die andere zwei congruente Zweige. Es ist daher nicht für jedes $z$ $l(z^2) = 2lz$*).

II. Kennt man schon den Logarithmus einer Zahl $a$, so findet sich der Logarithmus von $a+b$, wo $b<a$ ist, durch die Bemerkung, dafs $a+b = a\left(1+\frac{b}{a}\right)$, mithin $l(a+b) = la + l\left(1+\frac{b}{a}\right)$ ist. Da der Voraussetzung nach $\frac{b}{a}$ ein ächter Bruch sein mufs, so darf man die Formel (3) in Anwendung bringen, wodurch man erhält

$$l(a+b) = la + \frac{b}{a} - \frac{1}{2}\left(\frac{b}{a}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{b}{a}\right)^3 - \cdots \quad (11)$$

Eine brauchbarere Formel ergiebt sich aus der identischen Gleichung

$$1 + \frac{b}{a} = \frac{1 + \frac{b}{2a+b}}{1 - \frac{b}{2a+b}}$$

Setzt man hier $\frac{b}{2a+b}$ an die Stelle von $x$ in die Gleichung (7), so bekommt man leicht:

$$l(a+b) = la + 2\left[\frac{b}{2a+b} + \frac{1}{3}\left(\frac{b}{2a+b}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{b}{2a+b}\right)^5 + \cdots\right] \quad (12)$$

und dieſs gilt, so lange $x = \frac{b}{2a+b}$ ein ächter Bruch, d. i. so lange $a$ positiv ist.

Nimmt man in den Formeln (3) und (5) $x = \frac{1}{p}$, so erhält man leicht vermöge der Gleichungen

$$1 + \frac{1}{p} = \frac{p+1}{p} \quad \text{und} \quad 1 - \frac{1}{p} = \frac{p-1}{p}$$

*) Diese Bemerkung ist auch für die Integralrechnung von Wichtigkeit, wo aus der Nichtbeachtung derselben einige grobe Irrthümer entstanden sind.

Digitized by Google

$$lp = l(p+1) - \frac{1}{p} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{p}\right)^3 + \cdots$$

$$lp = l(p-1) + \frac{1}{p} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{p}\right)^3 + \cdots$$

und durch Addition beider und nachherige Division mit 2

$$\left.\begin{aligned} lp = {} & \frac{1}{2}l(p-1) + \frac{1}{2}l(p+1) \\ & + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p^2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{p^4} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{p^6} + \cdots \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

Diese Formel ist sehr brauchbar; da man nämlich nur die Logarithmen der Primzahlen zu berechnen braucht, so sind für eine Primzahl $p$ die Zahlen $p-1$ und $p+1$ zusammengesetzte Zahlen, mithin ihre Logarithmen schon bekannt. Diefs setzt indessen voraus, dafs die Logarithmen der ersten Primzahlen 2 und 3 bereits gegeben seien. Aber auch diese lassen sich leicht aus der obigen Reihe selbst finden. Für $p=2$ und $p=3$ erhält man nämlich

$$l2 = \frac{1}{2}l3 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2^4} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2^6} + \cdots$$

$$l3 = \frac{1}{2}l2 + \frac{1}{2}l4 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3^2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3^4} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3^6} + \cdots$$

Bezeichnet man die Summen der Reihen rechts mit $A$ und $B$ und beachtet, dafs $l4 = 2l2$ ist, so erhält man die zwei Gleichungen

$$l2 = \frac{1}{2}l3 + A, \quad l3 = \frac{3}{2}l2 + B$$

welche zwei Unbekannte $l2$ und $l3$ enthalten. Entwickelt man dieselben algebraisch daraus, so ergiebt sich

$$l2 = 2A + 4B, \quad l3 = 6A + 4B$$

womit die gesuchten Logarithmen aus den Summen zweier Reihen berechnet werden.

Die bisherigen Formeln lehren blos den natürlichen Logarithmus einer Zahl berechnen und es wäre daher noch die Frage, wie man die Logarithmen jedes anderen Systemes auffinden sollte. Für den ersten Augenblick könnte man glauben, dafs hierzu noch besondere Reihen nöthig seien; diefs ist aber gar nicht der Fall; es reicht hin, die natürlichen Logarithmen mit einem gewissen constanten Faktor zu multipliziren, um sie sogleich in die künstlichen eines verlangten Systemes zu verwandeln. Es

Digitized by Google

ist nämlich, wenn $b$ die Basis des künstlichen Systemes bezeichnet, für jedes $z$

$$b = e^{lz} \text{ und auch } = b^{\log z}, \ (\text{bas } b).$$

Nimmt man beiderseits die natürlichen Logarithmen, so ergiebt sich

$$lz = \log z \ . \ lb$$

mithin

$$\log z = \frac{1}{lb} \ . \ lz.$$

Hat man also die Logarithmen für die Basis $b$ zu berechnen, so braucht man blos die natürlichen Logarithmen mit dem Faktor $\frac{1}{lb}$, den man den Modulus nennt, zu multipliziren. Es ist z. B. für das Brigg'sche System, worin $b = 10$,

$$l10 = 2{,}302585093^*), \ \frac{1}{l10} = 0{,}434294482$$

also die letztere Zahl der Modulus dieses Systemes.

---

## Capitel VIII.

## Die Reihen für den Sinus und Cosinus.

### §. 36.

Vorbereitende Sätze.

Nachdem wir in den letzten drei Capiteln die Relationen kennen gelernt haben, welche bei der Potenz, der Exponenzialgröfse und dem Logarithmus statt finden, ist es nun unsere Aufgabe, uns mit den goniometrischen Funktionen und ihren Umkehrungen, den cyklometrischen, zu beschäftigen. Die hierher gehörenden Entwickelungen bilden den reichsten und interessantesten Theil der Analysis, aber sie erfordern auch einen eigenthümlichen Calcül, der uns in den nächsten Capiteln beschäftigen wird. Indessen läfst sich unabhängig von demselben doch Einiges entdecken und dieses wird der Gegenstand unserer jetzigen Betrachtung sein.

Wenn man das Gesetz beachtet, nach welchem sich die Binomial-

*) Man findet dieſs leicht durch die Bemerkung $l10 = l(3^2 + 1)$; zuerst sucht man $l3$ nach der oben gezeigten Weise, dann ist $l9 = 2l3$, und $l(9 + 1)$ läfst sich dann aus Formel (12) für $b = 1$, $a = 9$ ableiten.

Digitized by Google

coeffizienten durch successive Addition bilden, so bemerkt man bald, dafs ein Verfahren, welches dem am Ende des §. 27 benutzten ganz ähnlich ist, auch auf goniometrische Funktionen anwendbar sei. Mittelst des goniometrischen Satzes

$$2\cos a\cos b = \cos(a+b) + \cos(a-b) \qquad (1)$$

hat man nämlich

$$2\cos x\,.\,\cos mx = \cos(m+1)x + \cos(m-1)x. \qquad (2)$$

Multiplizirt man beiderseits mit $2\cos x$ und wendet die Formel (1) auf jedes der rechts entstehenden Cosinusprodukte an, so wird

$$(2\cos x)^2\cos mx = \cos(m+2)x + \cos mx + \cos mx + \cos(m-2)x$$

oder

$$(2\cos x)^2\cos mx = \cos(m+2)x + 2\cos mx + \cos(m-2)x. \qquad (3)$$

Multiplizirt man wieder mit $2\cos x$ und zerlegt rechts, so entsteht

$$(2\cos x)^3\cos mx = \cos(m+3)x + \cos(m+1)x + 2\cos(m+1)x + 2\cos(m-1)x + \cos(m-1)x + \cos(m-3)x$$

d. i.

$$(2\cos x)^3\cos mx = \cos(m+3)x + 3\cos(m+1)x + 3\cos(m-1)x + \cos(m-3)x \qquad (4)$$

Eine nochmalige Anwendung dieses Verfahrens giebt

$$(2\cos x)^4\cos mx = \cos(m+4)x + 4\cos(m+2)x + 6\cos mx + 4\cos(m-2)x + \cos(m-4)x \qquad (5)$$

Man bemerkt hier sogleich, dafs die in den Gleichungen (2), (3), (4), (5) vorkommenden Coeffizienten der Cosinus, nämlich

1, 1
1, 2, 1
1, 3, 3, 1
1, 4, 6, 4, 1
u. s. f.

die Binomialcoeffizienten sind, weil sie sich auf dieselbe Weise durch successive Addition bilden, wie früher beim Binomialtheorem gezeigt wurde. Setzt man das oben gebrauchte Verfahren bis zu einer beliebigen positiven ganzen Zahl $n$ fort, so ist

$$(2\cos x)^n\cos mx = n_0\cos(m+n)x + n_1\cos(m+n-2)x + n_2\cos(m+n-4)x + \ldots + n_{n-1}\cos(m-n+2)x + n_n\cos(m-n)x \qquad (6)$$

Digitized by Google

und dieſs gilt für jedes willkührliche $m$, aber nur für ganze positive $n$.

Dieser schon an und für sich interessante goniometrische Satz bildet die Grundlage unserer weiteren Entwickelungen. Der Lauf derselben ist folgender:

Nehmen wir an, $m$ sei eine positive ganze Zahl und $= n$, so ist

$$\left.\begin{array}{c}(2\cos x)^m \cos mx \\ = m_0 \cos 2mx + m_1 \cos(2m-2)x + m_2 \cos(2m-4)x + \ldots \\ \ldots + m_{m-1} \cos 2x + m_m\end{array}\right\} \quad (7)$$

oder wenn $\frac{1}{2}x$ für $x$ gesetzt wird,

$$\left.\begin{array}{c}\left(2\cos\frac{1}{2}x\right)^m \cos\frac{m}{2}x \\ = m_0 \cos mx + m_1 \cos(m-1)x + m_2 \cos(m-2)x + \ldots \\ \ldots + m_{m-1} \cos x + m_m\end{array}\right\} \quad (8)$$

Bemerkt man, dafs immer $m_m = m_0 = 1$, $m_{m-1} = m_1$ u. s. f. ist, so kann man die Reihe auch in umgekehrter Ordnung schreiben, wie folgt:

$$\left.\begin{array}{c}\left(2\cos\frac{1}{2}x\right)^m \cos\frac{m}{2}x \\ = 1 + m_1 \cos x + m_2 \cos 2x + m_3 \cos 3x + \ldots + m_m \cos mx.\end{array}\right\} \quad (9)$$

Ganz ähnliche Sätze, wie die bisher entwickelten, lassen sich auch für den Sinus entdecken. Man fängt hier mit der identischen Gleichung an:

$$2\cos x \,.\, \sin mx = \sin(m+1)x + \sin(m-1)x$$

durch Multiplikation mit $2\cos x$ und Zerlegung auf der rechten Seite erhält man leicht

$$(2\cos x)^2 \sin mx = \sin(m+2)x + 2\sin mx + \sin(m-2)x$$

wo man wieder das nämliche Verfahren anwenden kann. Man bekommt überhaupt für ein positives ganzes $n$

$$\left.\begin{array}{c}(2\cos x)^n \sin mx \\ = n_0 \sin(m+n)x + n_1 \sin(m+n-2)x + n_2 \sin(m+n-4)x + \ldots \\ \ldots + n_{n-1} \sin(m-n+2)x + n_n \sin(m-n)x\end{array}\right\} \quad (10)$$

welches das Correlat zu (6) ist. Es folgt daraus für ein ganzes positives $m$ und $n = m$

$$\left.\begin{array}{c}(2\cos x)^m \sin mx \\ = m_0 \sin 2mx + m_1 \sin(2m-2)x + m_2 \sin(2m-4)x + \ldots \\ \ldots + m_{m-1} \sin 2x\end{array}\right\} \quad (11)$$

Setzt man hier $\frac{1}{2}x$ für $x$ und schreibt die Reihe rechts in umgekehrter

Digitized by Google

Ordnung unter der Bemerkung, dafs $m_{m-1} = m_1$, $m_{m-2} = m_2$ u. s. f. ist, so ergiebt sich

$$\left.\begin{aligned}&\left(2\cos\frac{1}{2}x\right)^m \sin\frac{m}{2}x\\ &= m_1 \sin x + m_2 \sin 2x + m_3 \sin 3x + \ldots + m_m \sin mx\end{aligned}\right\} \quad (12)$$

ein Satz, welcher dem in (9) entwickelten ganz analog ist. Setzt man noch $x = \pi - \theta$, und bemerkt, dafs für ein ganzes positives $n$

$$\cos n(\pi - \theta) = \cos n\pi \cos n\theta = (-1)^n \cos n\theta$$

$$\sin n(\pi - \theta) = -\cos n\pi \sin n\theta = (-1)^{n+1} \sin n\theta$$

ist, so entstehen aus (9) und (12) die folgenden beiden Sätze:

$$\left.\begin{aligned}&\left(2\sin\frac{1}{2}\theta\right)^m \cos\frac{m}{2}(\pi - \theta)\\ &= 1 - m_1\cos\theta + m_2\cos 2\theta - m_3\cos 3\theta + \ldots + (-1)^m \cos m\theta\end{aligned}\right\} (13)$$

$$\left.\begin{aligned}&\left(2\sin\frac{1}{2}\theta\right)^m \sin\frac{m}{2}(\pi - \theta)\\ &= m_1\sin\theta - m_2\sin 2\theta + m_3\sin 3\theta - \ldots + (-1)^{m+1} \sin m\theta\end{aligned}\right\} (14)$$

Es sind in beiden Gleichungen die Werthe von $\cos\frac{m}{2}(\pi - \theta)$ und $\sin\frac{m}{2}(\pi - \theta)$ nicht weiter entwickelt, da sie sich verschieden gestalten, je nachdem man für $m$ eine gerade oder ungerade Zahl setzt. Nimmt man z. B. in der Gleichung (13) successive $m = 0, 1, 2, 3, \ldots m$ selbst, so erhält man folgende Reihe von Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}&1 = 1\\ &\left(2\sin\frac{1}{2}\theta\right) \sin\frac{1}{2}\theta = 1 - 1_1\cos\theta\\ -&\left(2\sin\frac{1}{2}\theta\right)^2 \cos\frac{2}{2}\theta = 1 - 2_1\cos\theta + 2_2\cos 2\theta\\ -&\left(2\sin\frac{1}{2}\theta\right)^3 \sin\frac{3}{2}\theta = 1 - 3_1\cos\theta + 3_2\cos 2\theta - 3_3\cos 3\theta\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ +&\left(2\sin\frac{1}{2}\theta\right)^m \sin\frac{m}{2}(\pi - \theta) = 1 - m_1\cos\theta + m_2\cos 2\theta - \ldots + (-1)^{m+1}\cos m\theta\end{aligned}\right\} (15)$$

Das Gesetz des Zeichenwechsels ist hier leicht zu übersehen; ist nämlich $p$ eine ganze positive Zahl, so hat man

$$\cos\frac{2p}{2}(\pi - \theta) = \cos p(\pi - \theta) = (-1)^p \cos\frac{2p}{2}\theta$$

$$\cos\frac{2p+1}{2}(\pi - \theta) = \sin\frac{2p+1}{2}\pi \sin\frac{2p+1}{2}\theta = (-1)^p \sin\frac{2p+1}{2}\theta$$

Digitized by Google

Es haben also zwei auf einander folgende Glieder ein gerades und darauf ein ungerades der Vertikalreihe links in (15) gleiches Vorzeichen; das Zeichen wechselt folglich von Paar zu Paar.

Aus der Reihe (14) erhält man ganz ähnlich für $m = 1, 2, 3, \ldots m$,

$$\left.\begin{aligned}
&\left(2\sin\tfrac{1}{2}\theta\right)\cos\tfrac{1}{2}\theta = 1_1\sin\theta\\
&\left(2\sin\tfrac{1}{2}\theta\right)^2\sin\tfrac{2}{2}\theta = 2_1\sin\theta - 2_2\sin 2\theta\\
-&\left(2\sin\tfrac{1}{2}\theta\right)^3\cos\tfrac{3}{2}\theta = 3_1\sin\theta - 3_2\sin 2\theta + 3_3\sin 3\theta\\
-&\left(2\sin\tfrac{1}{2}\theta\right)^4\sin\tfrac{4}{2}\theta = 4_1\sin\theta - 4_2\sin 2\theta + 4_3\sin 3\theta - 4_4\sin 4\theta\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\left(2\sin\tfrac{1}{2}\theta\right)^m\sin\tfrac{m}{2}(\pi-\theta) = m_1\sin\theta - m_2\sin 2\theta + \ldots + (-1)^{m+1}\sin m\theta
\end{aligned}\right\}(16)$$

Von diesen Gleichungen werden wir nun sogleich eine Anwendung machen.

## §. 37.

### Die Cosinus- und Sinusreihe.

Wenn man in der Gleichung (15) die erste Horizontalreihe mit $+m_0$, die zweite mit $-m_1$, die dritte mit $+m_2$, die vierte mit $-m_3$ u. s. f. multiplizirt und Alles addirt, so erhält man Folgendes:

$$\begin{aligned}
&m_0 - m_2\left(2\sin\tfrac{1}{2}\theta\right)^2\cos\tfrac{2}{2}\theta + m_4\left(2\sin\tfrac{1}{2}\theta\right)^4\cos\tfrac{4}{2}\theta - \ldots\\
+&m_1\left(2\sin\tfrac{1}{2}\theta\right)\sin\tfrac{1}{2}\theta - m_3\left(2\sin\tfrac{1}{2}\theta\right)^3\sin\tfrac{3}{2}\theta + m_5\left(2\sin\tfrac{1}{2}\theta\right)^5\sin\tfrac{5}{2}\theta - \ldots\\
&= m_0 - m_1 + m_2 - m_3 + \ldots \pm m_m\\
&\quad + \cos\theta\,(1_1 m_1 - 2_1 m_2 + 3_1 m_3 - \ldots \pm m_1 m_m)\\
&\quad + \cos 2\theta\,(2_2 m_2 - 3_2 m_3 + 4_2 m_4 - \ldots \pm m_2 m_m)\\
&\quad + \cos 3\theta\,(3_3 m_3 - 4_3 m_4 + 5_3 m_5 - \ldots \pm m_3 m_m)\\
&\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\quad + \cos m\theta\,.\,m_m m_m
\end{aligned}$$

Alle Horizontalreihen auf der zweiten Seite der Gleichung sind aber summirbar nach Formel (5) §. 31, wenn man das dortige $n = 0, 1, 2, \ldots m-1$ setzt. Man findet auf diese Weise, dafs die Summen aller dieser Reihen, deren jede nächstfolgende der Zahl nach ein Glied weniger hat, als die vorhergehende, gleich Null sind, mit Ausnahme der letzten Reihe,

Digitized by Google

welche nur aus einem Gliede $m_m m_m = 1$ besteht. Wir erhalten hierdurch den merkwürdigen Satz:

$$\left.\begin{aligned} cos\, m\theta = m_0 - m_2 \left(2\, sin\, \tfrac{1}{2}\theta\right)^2 cos\, \tfrac{2}{2}\theta + m_4 \left(2\, sin\, \tfrac{1}{2}\theta\right)^4 cos\, \tfrac{4}{2}\theta - \ldots \\ + m_1 \left(2\, sin\, \tfrac{1}{2}\theta\right) sin\, \tfrac{1}{2}\theta - m_3 \left(2\, sin\, \tfrac{1}{2}\theta\right)^3 sin\, \tfrac{3}{2}\theta + \ldots \end{aligned}\right\} (17)$$

Durch ein ähnliches Verfahren bekommt man aus der Gleichung (16) einen analogen Satz. Man multiplizirt nämlich die erste Horizontalreihe mit $m_1$, die zweite mit $-m_2$, die dritte mit $+m_3$ u. s. f., worauf man Alles addirt; man findet leicht durch Anwendung des schon vorher gebrauchten Satzes (5) §. 31 die Gleichung:

$$\left.\begin{aligned} sin\, m\theta = m_1 \left(2\, sin\, \tfrac{1}{2}\theta\right) cos\, \tfrac{1}{2}\theta - m_3 \left(2\, sin\, \tfrac{1}{2}\theta\right)^3 cos\, \tfrac{3}{2}\theta + \ldots \\ - m_2 \left(2\, sin\, \tfrac{1}{2}\theta\right)^2 sin\, \tfrac{2}{2}\theta - m_4 \left(2\, sin\, \tfrac{1}{2}\theta\right)^4 sin\, \tfrac{4}{2}\theta - \ldots \end{aligned}\right\} (18)$$

Von diesen beiden Sätzen lassen sich nun sehr elegante Anwendungen zur Bestimmung des Cosinus und Sinus durch den Bogen machen.

I. Wir wollen die Reihe (17) einfach durch

$$\left.\begin{aligned} cos\, m\theta = A_0 - A_2 + A_4 - A_6 + \ldots \\ + B_1 - B_3 + B_5 - B_7 + \ldots \end{aligned}\right\} \quad (19)$$

darstellen und dabei bemerken, dafs für jedes ganze $p$

$$A_{2p} = \frac{m\,(m-1)\,(m-2)\ldots(m-\overline{2p-1})}{1\,.\,2\,.\,3\ldots(2p)} \left(2\, sin\, \tfrac{1}{2}\theta\right)^{2p} cos\, \frac{2p}{2}\theta$$

$$B_{2p+1} = \frac{m\,(m-1)\,(m-2)\ldots(m-2p)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots(2p+1)} \left(2\, sin\, \tfrac{1}{2}\theta\right)^{2p+1} sin\, \frac{2p+1}{2}\theta$$

ist, wobei die Reihe (19) $m+1$ Glieder enthält und aus den vorstehenden Formeln hervorgeht, wenn $p = 1, 2, 3, \ldots$ gesetzt wird. Nehmen wir noch $m\theta = x$, woraus $m = \frac{x}{\theta}$ folgt, so ist

$$\left.\begin{aligned} cos\, x = A_0 - A_2 + A_4 - A_6 + \ldots \\ + B_1 - B_3 + B_5 - B_7 + \ldots \end{aligned}\right\} \quad (20)$$

und durch Einführung des Werthes $m = \frac{x}{\theta}$ bringt man die Ausdrücke für $A_{2p}$ und $B_{2p+1}$ leicht auf die folgenden Formen:

Digitized by Google

$$A_{2p} = \frac{x\,(x-\theta)\,(x-2\theta)\ldots(x-\overline{2p-1}\,\theta)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots(2p)}\left(\frac{2\sin\frac{1}{2}\theta}{\theta}\right)^{2p}\cos\frac{2p}{2}\theta$$

$$B_{2p+1} = \frac{x\,(x-\theta)\,(x-2\theta)\ldots(x-2p\,\theta)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots(2p+1)}\left(\frac{2\sin\frac{1}{2}\theta}{\theta}\right)^{2p+1}\sin\frac{2p+1}{2}\theta$$

Hier sind nun $x$ und $\theta$ zwei im Ganzen beliebige Bögen, nur der einen Bedingung unterworfen, dafs ihr Verhältnifs $\frac{x}{\theta}$ eine ganze Zahl (das frühere $m$) sei. Dieser Quotient bestimmt zugleich die Anzahl der Glieder in jeder der Reihen (20); für ein gerades $m = 2n$ hat die obere Reihe $n+1 = \frac{x}{2\theta}+1$ und die untere $n = \frac{x}{2\theta}$ Glieder, für ein ungerades $m = 2n-1$ hat jede Reihe $n$, d. i. $\frac{x}{2\theta}+\frac{1}{2}$ Glieder. Lassen wir nun $\theta$ ins Unendliche abnehmen, so nimmt $\frac{x}{\theta}$ über alle Gränze zu und es werden beide Reihen in (20) gleichzeitig unendliche. Wir haben nun noch die Gränzen zu bestimmen, welchen sich die Ausdrücke $A_{2p}$ und $B_{2p+1}$ nähern, wenn $\theta$ bis zur Gränze Null abnimmt. Diefs hat durchaus keine Schwierigkeit; es ist nämlich

$$Lim\,\frac{x\,(x-\theta)\,(x-2\theta)\ldots(x-\overline{2p-1}\,\theta)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots(2p)} = \frac{x^{2p}}{1\,.\,2\,.\,3\ldots(2p)}$$

$$Lim\left(\frac{2\sin\frac{1}{2}\theta}{\theta}\right)^{2p} = Lim\left(\frac{\sin\frac{1}{2}\theta}{\frac{1}{2}\theta}\right)^{2p} = 1$$

$$Lim\,\cos\frac{2p}{\theta}\theta = 1$$

folglich

$$Lim\,A_{2p} = \frac{x^{2p}}{1\,.\,2\,.\,3\ldots(2p)}$$

Ebenso leicht findet man, weil $Lim\,\sin\frac{2p+1}{2}\theta = 0$ ist,

$$Lim\,B_{2p+1} = 0$$

Führt man diese Werthe in die Gleichung (20) für $p = 1, 2, 3$ u. s. f. ein, so ergiebt sich

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1\,.\,2} + \frac{x^4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} - \frac{x^6}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5\,.\,6} + \ldots\ in\ inf. \quad (21)$$

Digitized by Google

und diese Gleichung mufs für jedes $x$ gelten, weil diefs bei der Gleichung (20) der Fall war. In der That convergirt die Reihe rechts auch für jedes $x$ und hat daher immer eine endliche Gröfse zur Summe, wie auch $\cos x$ immer einen endlichen Werth hat.

II. Eine ähnliche Transformation führt uns zu einer Reihe für den Sinus. Wir setzen kurz statt der Gleichung (18) die folgende

$$\left.\begin{aligned} \sin m\theta = {} & A_1 - A_3 + A_5 - A_7 + \ldots \\ & - B_2 + B_4 - B_6 + B_8 - \ldots \end{aligned}\right\} \qquad (22)$$

worin für ein ganzes positives $p$

$$A_{2p+1} = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-2p)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(2p+1)} \left(2\sin\frac{1}{2}\theta\right)^{2p+1} \cos\frac{2p+1}{2}\theta$$

$$B_{2p+2} = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-\overline{2p+1})}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(2p+2)} \left(2\sin\frac{1}{2}\theta\right)^{2p+2} \sin\frac{2p+2}{2}\theta$$

ist und die einzelnen Glieder in (22) dadurch entstehen, dafs man $p = 0, 1, 2, \ldots$ setzt. Für $m\theta = x$, also $m = \frac{x}{\theta}$, wird

$$\left.\begin{aligned} \sin x = {} & A_1 - A_3 + A_5 - A_7 + \ldots \\ & - B_2 + B_4 - B_6 + B_8 - \ldots \end{aligned}\right\} \qquad (23)$$

$$A_{2p+1} = \frac{x(x-\theta)(x-2\theta)\ldots(x-2p\theta)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(2p+1)} \left(\frac{2\sin\frac{1}{2}\theta}{\theta}\right)^{2p+1} \cos\frac{2p+1}{2}\theta$$

$$B_{2p+2} = \frac{x(x-\theta)(x-2\theta)\ldots(x-\overline{2p+1}\,\theta)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(2p+2)} \left(\frac{2\sin\frac{1}{2}\theta}{\theta}\right)^{2p+2} \sin\frac{2p+2}{2}\theta$$

Lassen wir hier $\theta$ bis zur Gränze Null abnehmen, so laufen die beiden Reihen (23) ins Unendliche fort, weil die Gesammtanzahl ihrer Glieder $= m = \frac{x}{\theta}$ ins Unendliche zunimmt, sobald $\theta$ sich der Gränze Null nähert. Es ist noch

$$Lim\, A_{2p+1} = \frac{x^{2p+1}}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(2p+1)}, \quad Lim\, B_{2p+1} = 0$$

folglich wird jetzt aus (23) die folgende Gleichung

$$\sin x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \ldots \text{ in inf.} \qquad (24)$$

welche für jedes $x$ gilt und in welcher die Reihe immer convergirt.

Die Gleichungen (21) und (24) lösen die Aufgabe, den Cosinus oder Sinus eines Bogens zu finden, wenn derselbe in Theilen des Halbmessers

Digitized by Google

gegeben ist. Da sich aus dem Sinus und Cosinus alle übrigen goniometrischen Funktionen ableiten lassen, so hat jetzt auch die allgemeinere Aufgabe, die goniometrischen Funktionen eines Bogens zu berechnen, ihre Lösung gefunden. Indessen werden wir später dafür noch besondere Nachweisungen geben.

## §. 38.

### Zusammenhang zwischen den Exponenzialgröfsen, den Sinus und Cosinus mittelst des Imaginären.

Es wird sich Jedem, der die Formeln (21) und (24) mit der Exponenzialreihe vergleicht, die Bemerkung aufdrängen, dafs diese drei Reihen eine gewisse Ähnlichkeit mit einander haben. Abgesehen nämlich vom Vorzeichen, enthält die Cosinusreihe die Glieder gerader, die Sinusreihe die Glieder ungerader Ordnung aus der Exponenzialreihe. Man könnte dieselben auch aus der Exponenzialreihe selbst sondern und zwar auf folgende Weise: Man setze in derselben erst $ix$ und dann $-ix$, wobei $i$ eine erst noch zu bestimmende Gröfse bezeichnet, an die Stelle von $x$, so wird

$$e^{ix} = 1 + \frac{ix}{1} + \frac{i^2x^2}{1.2} + \frac{i^3x^3}{1.2.3} + \cdots$$

$$e^{-ix} = 1 - \frac{ix}{1} + \frac{i^2x^2}{1.2} - \frac{i^3x^3}{1.2.3} + \cdots$$

Addirt und subtrahirt man beide Gleichungen, dividirt dann im ersten Falle beiderseits mit 2, im anderen mit $2i$, so erhält man

$$\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = 1 + \frac{i^2x^2}{1.2} + \frac{i^4x^4}{1.2.3.4} + \cdots \qquad (1)$$

$$\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \frac{x}{1} + \frac{i^2x^3}{1.2.3} + \frac{i^4x^5}{1.2.3.4.5} + \cdots \qquad (2)$$

Diese Reihen enthalten, abgesehen von $i$, ganz die nämlichen Potenzen und Coeffizienten wie die Reihen (21) und (23), und sie würden völlig in dieselben übergehen, wenn man die noch unbestimmte Gröfse $i$ so bestimmen könnte, dafs die successiven geraden Potenzen derselben den Zeichenwechsel herbeiführten, wenn also wäre

$$i^2 = -1,\ i^4 = +1,\ i^6 = -1,\ i^8 = +1 \text{ u. s. f.}$$

Alle diese unendlich vielen Gleichungen reduziren sich aber auf die erste, weil sie die successiven Potenzen derselben sind, also von selbst erfüllt werden, wenn man der ersten Genüge zu leisten versteht. Aus dieser

Digitized by Google

folgt aber $i = \sqrt{-1}$; hier ist nun zwar $i$ geradezu arithmetisch unmöglich, weil es keine Zahl giebt, die mit sich selbst multiplizirt $-1$ hervorbrächte, und dieſs könnte uns fast in unserer ganzen Betrachtung hemmen; wir wollen aber doch das Resultat $i = \sqrt{-1}$ beibehalten, weil es uns wenigstens zu einer formell merkwürdigen Relation verhilft. Da nämlich für diesen Werth von $i$ die Reihen (1) und (2) mit denen in (21) und (24) identisch werden, so ist jetzt

$$\frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2} = \cos x \qquad (3)$$

$$\frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} = \sin x \qquad (4)$$

Hieraus folgt noch, wenn man die zweite Gleichung mit $\sqrt{-1}$ multiplizirt, und darauf beide addirt und subtrahirt:

$$e^{x\sqrt{-1}} = \cos x + \sqrt{-1}\,\sin x \qquad (5)$$

$$e^{-x\sqrt{-1}} = \cos x - \sqrt{-1}\,\sin x \qquad (6)$$

Diese letzteren Gleichungen kann man auch unmittelbar entdecken, wenn man in der Exponenzialreihe $x\sqrt{-1}$ für $x$ nimmt und bemerkt, dafs

$$(\sqrt{-1})^2 = -1,\ (\sqrt{-1})^4 = +1,\ (\sqrt{-1})^6 = -1,\ \text{etc.}$$

$$(\sqrt{-1})^3 = -\sqrt{-1},\ (\sqrt{-1})^5 = +\sqrt{-1},\ (\sqrt{-1})^7 = -\sqrt{-1},\ \text{etc.}$$

zu setzen ist, wodurch sich die Exponenzialreihe in zwei andere Reihen zerlegt, von denen die erste der Cosinus ist und die zweite (die Sinusreihe) den gemeinschaftlichen Faktor $\sqrt{-1}$ enthält.

Welche ist nun aber die Bedeutung der vier gefundenen Gleichungen und was sollen wir mit ihnen anfangen? Diese Fragen wird Jeder aufwerfen, der die letzten Resultate mit allen bisherigen vergleicht, von denen sie sich durch die neue Eigenschaft unterscheiden, dafs in ihnen eine Gröfse vorkommt, die auf keine Weise durch eine Zahl dargestellt werden kann. Wir wollen diese Fragen durch die folgenden Betrachtungen zu beantworten versuchen.

Dafs das Unternehmen, den Sinus und Cosinus durch zwei Exponenzialgröfsen auszudrücken, auf unmögliche Zahlen führen mufste, hätten wir eigentlich voraussehen können. So lange nämlich $i$ eine mögliche positive Zahl bedeutet, ist $e^{ix}$ eine Funktion, welche für wachsende $x$ stets wächst und immer positiv bleibt, die Funktion $e^{-ix}$ dagegen nimmt be-

Digitized by Google

ständig ab, ohne jedoch negativ zu werden. Hieraus folgt, dafs auch der Ausdruck

$$\frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + \frac{1}{e^{ix}}\right)$$

eine stets wachsende, immer positiv bleibende Funktion darstellt. Diese Eigenschaften stimmen aber gar nicht zu denen des Cosinus, welcher bei wachsenden $x$ zwischen den Gränzen $+1$ und $-1$ hin und her oszillirt. Es ist daher gar nicht zu verwundern, dafs wir in (3) für $i$ eine unmögliche Zahl gefunden haben, und ganz ähnlich verhält es sich mit der Gleichung (4). Indessen sind diese Gleichungen doch andererseits nicht ohne Bedeutung, ja es läfst sich sogar voraussagen, dafs uns dieselben für manche Aufgaben von grofsem Nutzen sein werden.

Es wäre nämlich leicht möglich, dafs wir für die Lösung irgend einer Aufgabe eine unbekannte Funktion unter der Form $f(x) = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$ zu vermuthen hätten, in welcher blos noch die Constante $i$ zu bestimmen wäre. Fänden wir nun $i = \sqrt{-1}$, so würden wir, wenn uns die Gleichung (3) nicht bekannt wäre, die Lösung der Aufgabe für unmöglich halten müssen; dagegen belehrt uns nun die genannte Relation, dafs diese Unmöglichkeit nur eine scheinbare, und dafs die Aufgabe nicht schlechthin unmöglich, sondern nur in der angenommenen Form unauflösbar sei. Die Gleichung (3) giebt uns dann einen Fingerzeig, dafs wir bei der Annahme, $f(x)$ sei von der genannten Form, einen Formfehler begangen haben und dafs die gesuchte Funktion hier nicht eine stets wachsende, sondern eine periodische sei*). Hieraus erhellt, dafs die Gleichungen (3) und (4), die zwar an und für sich leere Combinationen von analytischen Schematen ohne Begriffe darstellen, doch den gröfsten Nutzen gewähren können und dafs es wohl zweckmäfsig sein möchte, solcher Beziehungen noch mehrere zu entwickeln. Wenn wir also die Sprache der Analysis recht verstehen, so hören wir hier die Aufforderung derselben, uns auch nach solchen Gröfsenverknüpfungen umzusehen, welche scheinbar Unmögliches darstellen, die aber in der That nur beweisen, dafs diese oder jene Funktion unter einer gewählten Form nicht gegeben werden könne.

Wollen wir nun dieser an uns ergangenen Aufforderung nachkommen, so haben wir uns zunächst nach den Mitteln umzusehen, durch welche wir

*) In der That kommt dieser Fall bei der Integration der Differenzialgleichungen in der höheren Analysis vor.

Digitized by Google

die genannte, anscheinend schwere Aufgabe lösen könnten. Hierbei dienen uns die Gleichungen (5) und (6) als Rathgeber. Man bemerkt nämlich, dafs es auch umgekehrt sehr leicht ist, die Formeln (3) und (4) aus den letzteren (5) und (6) abzuleiten, sobald man diese auf die dort angedeutete Weise unmittelbar aus der Exponenzialreihe entwickelt hat. Die Bedeutung der Gleichungen (5) und (6) besteht aber ganz einfach darin, dafs sie angeben, in welche neuen Funktionen sich die Exponenzialgröfse umsetzt, wenn die Veränderliche zu einer unmöglichen Zahl wird. Könnten wir nun etwas Ähnliches für alle übrigen in der Analysis vorkommenden Funktionen leisten, so würden wir auch die vorher gestellte Aufgabe lösen können, weil wir dann nur solche geschickte Combinationen der entwickelten Gleichungen vorzunehmen hätten, dafs auf einer Seite die unmöglichen Zahlen verschwänden, wie dieſs bei den Gleichungen (5) und (6) durch Addition und Subtraktion geschehen kann. Wir wollen demnach unsere Aufgabe etwas bestimmter fassen und fragen, in welche Funktionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ sich eine gegebene Funktion $f(x)$ bei unmöglichem $x$ dergestalt zerlegt, dafs

$$f(x\sqrt{-1}) = \varphi(x) + \sqrt{-1}\,\psi(x) \qquad (7)$$

ist; denn unter dieser Form stehen die Gleichungen (5) und (6). Verallgemeinert wird noch die Aufgabe, wenn man statt $x\sqrt{-1}$ eine zweitheilige Gröfse $y + x\sqrt{-1}$ setzt, von welcher ein Theil möglich, der andere unmöglich ist.

Aufserdem liegt uns noch eine zweite Untersuchung ob. Wir wissen nämlich, dafs verschiedenen Funktionen charakteristische Eigenschaften zukommen, z. B. der Potenz $x^\mu$ die, dafs $x^\mu \cdot y^\mu = (xy)^\mu$ ist, der Exponenzialgröfse die Eigenschaft $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ u. s. f., für welche wir den Beweis nur unter der Voraussetzung möglicher Zahlwerthe der Veränderlichen geführt haben. Ob nun diese Eigenschaften ungestört bleiben, wenn wir für das $x$ oder $y$ unmögliche Zahlen setzen, das ist die Frage, von deren Lösung unsere weiteren Fortschritte in der Analysis gänzlich abhängen und die sich beantworten lassen wird, wenn wir die neuen Funktionen kennen gelernt haben, in welche sich eine Funktion bei unmöglichen Werthen der Veränderlichen zerlegt. Es ist dieſs eine ganz ähnliche Frage, wie die bei der Lehre von den unendlichen Reihen discutirte, und auch hier ist der Grund derselben ein ganz ähnlicher. Wollte man nämlich die Eigenschaften der Funktionen ohne Weiteres auch für unmögliche



Digitized by Google

Zahlwerthe der Veränderlichen benutzen*), so wäre dieſs eine höchst willkührliche Ausdehnung der Rechnungsoperationen über die Gränzen hinaus, innerhalb deren wir die Beweise für die Richtigkeit jener Operationen in den Händen haben, eine Ausdehnung, die vielleicht eine völlig widersinnige sein und deſshalb auf ganz falsche Resultate führen könnte. Wir müssen daher erst die Rechtstitel aufweisen, durch welche wir eine derartige Ausdehnung der Rechnungsoperationen rechtfertigen können. Wir haben mithin für unsere zu begründende Rechnung mit den unmöglichen Zahlen drei Aufgaben zu lösen: 1) Zerfällung der Funktionen in andere nach dem Schema (7), 2) Ableitung von Ausdrücken, in welchen das Unmögliche nur scheinbar ist und 3) Untersuchung über die weitere Gültigkeit der Eigenschaften der Funktionen für den Fall, daſs die Veränderliche unmögliche Zahlwerthe annimmt.

---

# Capitel IX.

## Potenzen mit unmöglichen Grundzahlen.

### §. 39.

Allgemeine Form unmöglicher Binome.

Da wir es in den folgenden Untersuchungen immer mit der unmöglichen oder, wie man auch sagt, imaginären Zahl $\sqrt{-1}$ zu thun haben werden, so wollen wir der Kürze wegen ein einfacheres Zeichen und zwar den Buchstaben $i$ dafür brauchen, so daſs also

$$\left.\begin{array}{llll} i^2=-1, & i^4=+1, & i^6=-1, & i^8=+1, \ \ldots \\ i^3=-i, & i^5=+i, & i^7=-i, & i^9=+i, \ \ldots \end{array}\right\} \quad (1)$$

ist. Eine zweitheilige Gröſse $\alpha+\beta i$, von der ein Glied den Faktor $i$ hat, heiſse ein imaginäres Binom, $\alpha$ dessen reeller, $\beta i$ sein imaginärer Theil. Es gelten von diesen Gröſsen einige wichtige Sätze, welche wir der Lehre von den imaginären Gröſsen überhaupt vorausschicken müssen.

I. Wenn $a+bi=\alpha+\beta i$, so sind die reellen und imaginären Theile sich gegenseitig gleich, d. h. $a=\alpha$, $b=\beta$.

*) Dieſs ist in der That fast immer geschehen und beweist wieder den gänzlichen Mangel an Kritik in der Mathematik.

Digitized by Google

Aus $a + bi = \alpha + \beta i$ folgt nämlich

$$a - \alpha = (\beta - b)\, i$$

und durch beiderseitige Erhebung aufs Quadrat

$$(a - \alpha)^2 = -(\beta - b)^2$$

oder

$$(a - \alpha)^2 + (\beta - b)^2 = 0.$$

Quadrate sind nun immer positive Gröfsen; die Summe zweier positiven Gröfsen kann aber nicht Null sein, wenn nicht jede einzelne für sich Null ist; es mufs also sein

$$a - \alpha = 0, \quad \beta - b = 0$$

woraus $a = \alpha$, $b = \beta$ folgt.

II. Man kann imaginäre Binome immer auf die Form $r\,(\cos\theta + i \sin\theta)$ bringen, wo $r$ eine gewisse reelle Gröfse und $\theta$ einen bestimmten reellen Winkel bezeichnet.

Soll nämlich

$$\alpha + \beta i = r\,(\cos\theta + i \sin\theta) = r\cos\theta + ir\sin\theta$$

sein, so folgt durch Vergleichung der reellen und imaginären Theile beiderseits

$$r\cos\theta = \alpha, \quad r\sin\theta = \beta.$$

Aus diesen beiden Gleichungen erhält man zuerst $r$, wenn man jede quadrirt und sie darauf addirt; man findet

$$r^2 = \alpha^2 + \beta^2 \text{ oder } r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}. \qquad (2)$$

Um $\theta$ zu bekommen, braucht man nur mit der ersten der vorigen Gleichungen in die zweite zu dividiren, wodurch sich

$$\tan\theta = \frac{\beta}{\alpha}, \text{ folglich } \theta = Arctan\,\frac{\beta}{\alpha} \qquad (3)$$

ergiebt. Da der nämlichen Tangente unendlich viele Bogen entsprechen, so giebt es also eine unendliche Menge von Auflösungen der Gleichung

$$\alpha + \beta i = r\,(\cos\theta + i \sin\theta). \qquad (4)$$

Man nennt hier $r$ den Modulus des imaginären Binoms, und das Übrige, nämlich $\cos\theta + i \sin\theta$, den reduzirten Ausdruck.

Der in den Gleichungen (2), (3) und (4) ausgesprochene Satz, dafs jedes imaginäre Binom auf die Form $r\,(\cos\theta + i \sin\theta)$ gebracht werden könne, ist für das Folgende defswegen von Bedeutung, weil er uns der Mühe überhebt, mit Ausdrücken wie $\alpha + \beta i$ selbst zu rechnen und uns berechtigt, Alles, was sich von imaginären Gröfsen sagen läfst, nur für Gröfsen von der viel geschmeidigeren Form $\cos\theta + i \sin\theta$ auszusprechen.



Digitized by Google

Wir wollen uns nun gleich mit den einfachsten Rechnungsoperationen in ihrer Anwendung auf reduzirte Ausdrücke beschäftigen.

III. Man könnte zuerst das Problem stellen, das Produkt zweier reduzirten Ausdrücke

$$\cos\theta_1 + i\sin\theta_1, \quad \cos\theta_2 + i\sin\theta_2$$

wieder in die Form $\varphi(\theta_1, \theta_2) + i\psi(\theta_1, \theta_2)$ zu bringen.

Dieſs geschieht leicht durch wirkliche Ausführung der Multiplikation, bei welcher man erhält

$$(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\ (\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$
$$= \cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)$$

d. i.

$$\left.\begin{array}{l}(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\ (\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)\\ = \cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)\end{array}\right\} \quad (5)$$

ein ebenso einfaches, als wichtiges Theorem, welches das Fundamentaltheorem von den imaginären Gröſsen bildet.

Setzt man $\theta_2 = -\theta_1$ und schreibt dann überhaupt $\theta$ für $\theta_1$, so wird noch

$$(\cos\theta + i\sin\theta)\ (\cos\theta - i\sin\theta) = 1 \quad (6)$$

was man auch aus dem Satze

$$(a + b)\ (a - b) = a^2 - b^2$$

finden würde.

Multiplizirt man die Gleichung (5) noch mit $\cos\theta_3 + i\sin\theta_3$, so wird

$$(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\ (\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)\ (\cos\theta_3 + i\sin\theta_3)$$
$$= [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)]\ (\cos\theta_3 + i\sin\theta_3)$$

d. i. wenn man rechts den Satz (5) selbst wieder in Anwendung bringt, indem man sich $\theta_1 + \theta_2$ für $\theta_1$ und $\theta_3$ für $\theta_2$ gesetzt denkt,

$$\left.\begin{array}{l}(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\ (\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)\ (\cos\theta_3 + i\sin\theta_3)\\ = \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) + i\sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)\end{array}\right\} \quad (7)$$

Man übersieht auf der Stelle, wie man hier weiter gehen könnte, wenn man beiderseits noch mit $\cos\theta_4 + i\sin\theta_4$ multipliziren wollte. Man erhält nämlich überhaupt für eine beliebige Anzahl von Winkeln $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \ldots \theta_m$,

$$\left.\begin{array}{l}(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\ (\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)\ (\cos\theta_3 + i\sin\theta_3)\ \ldots\\ \qquad \ldots\ (\cos\theta_m + i\sin\theta_m)\\ = \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \ldots + \theta_m) + i\sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \ldots + \theta_m)\end{array}\right\} \quad (8)$$

Aus diesem Satze lieſsen sich goniometrische Sätze dadurch ableiten, daſs man links die Multiplikationen ausführte und dann beiderseits die reel-

Digitized by Google

len und imaginären Theile vergleicht. So findet man z. B. für drei Winkel

$$\begin{aligned} \cos(\theta_1+\theta_2+\theta_3) &= \cos\theta_1\cos\theta_2\cos\theta_3 - \cos\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3 \\ &\quad - \sin\theta_1\cos\theta_2\sin\theta_3 - \sin\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3 \\ \sin(\theta_1+\theta_2+\theta_3) &= \sin\theta_1\cos\theta_2\cos\theta_3 + \cos\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3 \\ &\quad + \cos\theta_1\cos\theta_2\sin\theta_3 - \sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3 \end{aligned}$$

Nimmt man in der Gleichung (8) einen oder mehrere Winkel negativ und beachtet, dafs $\cos(-\theta) = \cos\theta$, $\sin(-\theta) = -\sin\theta$ ist, so löst man die Aufgabe der Multiplikation solcher reduzirten Ausdrücke, deren imaginäre Theile theils positiv, theils negativ sind. So hat man z. B.

$$\left.\begin{aligned} &(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\,(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2) \\ &= \cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2) \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

eine Gleichung, die für $\theta_2 = \theta_1 = \theta$ in die sechste übergeht.

IV. Das Problem der Division reduzirter Ausdrücke kann man leicht auf die eben ausgeführte Multiplikation zurückführen. Um den Quotienten

$$\frac{\cos\theta_1 + i\sin\theta_1}{\cos\theta_2 + i\sin\theta_2}$$

zu bestimmen, multiplizire man Zähler und Nenner mit $\cos\theta_2 - i\sin\theta_2$, benutze im Zähler die Gleichung (9) und im Nenner die Gleichung (6) für $\theta = \theta_2$; man erhält so

$$\frac{\cos\theta_1 + i\sin\theta_1}{\cos\theta_2 + i\sin\theta_2} = \cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2) \qquad (10)$$

wodurch das Problem der Division gelöst ist.

Nimmt man speziell $\theta_1 = 0$ und schreibt dann $\theta$ für $\theta_2$, so ergiebt sich noch

$$\frac{1}{\cos\theta + i\sin\theta} = \cos\theta - i\sin\theta \qquad (11)$$

was mit den übrigen Resultaten übereinstimmt.

Es ist nun ebenso leicht, auch Ausdrücke von der Form $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ mit einander zu multipliziren und in einander zu dividiren. Man hat z. B.

$$\begin{aligned} &r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)\cdots r_m(\cos\theta_m + i\sin\theta_m) \\ &= r_1 r_2 \cdots r_m\,[\cos(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_m) + i\sin(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_m)] \end{aligned}$$

und ähnlich

$$\frac{r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)} = \frac{r_1}{r_2}\,[\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)]$$

womit das Problem von der Multiplikation und Division beliebiger imaginärer Binome seine Lösung gefunden hat.

Digitized by Google

## §. 40.

### Das Moivre'sche Theorem.

So wie wir in der Arithmetik durch $a^m$ ein Produkt aus $m$ gleichen Faktoren $= a$ bezeichnen, so verstehen wir unter

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^m$$

dasjenige, was aus der linken Seite der Gleichung entspringt, wenn wir die Gröfsen $\theta_1, \theta_2, \ldots \theta_m$, deren $m$ sind, einander gleich und $= \theta$ nehmen. Wir erhalten nach dieser Definition für jedes ganze positive $m$

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^m = \cos m\theta + i\sin m\theta \qquad (1)$$

ein sehr wichtiges Theorem, welches uns die Potenzirung eines reduzirten Ausdruckes lehrt.

Wenn wir ferner die Wurzelgröfse

$$\sqrt[q]{(\cos\theta + i\sin\theta)^p}$$

in welcher $p$ und $q$ ganze positive Zahlen bedeuten, mit

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^{\frac{p}{q}}$$

bezeichnen, so gilt der obige Satz auch für gebrochene $m$. Dieſs läfst sich so zeigen. Es ist offenbar

$$\begin{aligned}\left(\cos\tfrac{p}{q}\theta + i\sin\tfrac{p}{q}\theta\right)^q &= \cos\tfrac{p}{q}q\theta + i\sin\tfrac{p}{q}q\theta \\ &= \cos p\theta + i\sin p\theta \\ &= (\cos\theta + i\sin\theta)^p\end{aligned}$$

Ziehen wir nun beiderseits die $q$te Wurzel, so ist

$$\cos\tfrac{p}{q}\theta + i\sin\tfrac{p}{q}\theta = \sqrt[q]{(\cos\theta + i\sin\theta)^p}$$

d. i. vermöge der gegebenen Definition von

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^{\frac{p}{q}},$$

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^{\frac{p}{q}} = \cos\tfrac{p}{q}\theta + i\sin\tfrac{p}{q}\theta. \qquad (2)$$

Da man sich irrationalen Zahlen durch rationale Brüche $\frac{p}{q}$ ohne Ende nähern kann, und der vorstehende Satz nie zu gelten aufhört, wie grofs auch $p$ und $q$ sein mögen, so ist nun für jedes ganze oder gebrochene, rationale oder irrationale, aber nothwendig positive $\mu$

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^\mu = \cos\mu\theta + i\sin\mu\theta. \qquad (3)$$

Digitized by Google

Wenn wir unter dem Ausdrucke

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^{-\mu}$$

nichts Anderes als

$$\frac{1}{(\cos\theta + i\sin\theta)^{\mu}}$$

verstehen wollen, so läfst sich zeigen, dafs die vorige Gleichung auch für negative $\mu$ gilt. Es ist nämlich, wenn wir in der Gleichung (11) des vorigen Paragraphen $\mu\theta$ an die Stelle von $\theta$ setzen,

$$\frac{1}{\cos\mu\theta + i\sin\mu\theta} = \cos\mu\theta - i\sin\mu\theta$$

oder

$$\frac{1}{(\cos\theta + i\sin\theta)^{\mu}} = \cos(-\mu)\theta + i\sin(-\mu)\theta$$

d. h. nach der vorhin gegebenen Definition

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^{-\mu} = \cos(-\mu)\theta + i\sin(-\mu)\theta$$

und diese Gleichung entspricht ganz der 3ten, wenn man $-\mu$ für $\mu$ setzt.

Halten wir also fest an den Definitionen, welche wir für

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^{\frac{p}{q}} \text{ und } (\cos\theta + i\sin\theta)^{-\mu}$$

gegeben haben, so ist jetzt für jedes reelle $\mu$

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^{\mu} = \cos\mu\theta + i\sin\mu\theta \qquad (4)$$

eine Gleichung, welche den Namen des Moivre'schen Theoremes führt.

Man kann aus ihr leicht Ausdrücke ableiten, welche nur scheinbar Unmögliches enthalten. Schreibt man nämlich $-\theta$ für $\theta$, so ist auch

$$(\cos\theta - i\sin\theta)^{\mu} = \cos\mu\theta - i\sin\mu\theta. \qquad (5)$$

Addirt man diese Gleichung zu der in (4) und dividirt die Summe durch 2, so wird

$$\frac{(\cos\theta + i\sin\theta)^{\mu} + (\cos\theta - i\sin\theta)^{\mu}}{2} = \cos\mu\theta. \qquad (6)$$

Subtrahirt man die Gleichung (5) von (4) und dividirt die Differenz durch $2i$, so ergiebt sich ähnlich:

$$\frac{(\cos\theta + i\sin\theta)^{\mu} - (\cos\theta - i\sin\theta)^{\mu}}{2i} = \sin\mu\theta. \qquad (7)$$

Man kann auch leicht zeigen, dafs die für die Potenz charakteristische Eigenschaft

Digitized by Google

$$(xy)^\mu = x^\mu \cdot y^\mu$$

auch dann noch gilt, wenn man für $x$ und $y$ imaginäre Gröfsen setzt. Es ist nämlich

$$\begin{aligned}
&[r_1 (\cos\vartheta_1 + i\sin\vartheta_1) \cdot r_2 (\cos\vartheta_2 + i\sin\vartheta_2)]^\mu \\
&= [r_1 r_2 \{\cos(\vartheta_1+\vartheta_2) + i\sin(\vartheta_1+\vartheta_2)\}]^\mu \\
&= r_1^\mu \cdot r_2^\mu \{\cos\mu(\vartheta_1+\vartheta_2) + i\sin\mu(\vartheta_1+\vartheta_2)\} \\
&= r_1^\mu \cdot r_2^\mu (\cos\mu\vartheta_1 + i\sin\mu\vartheta_1)(\cos\mu\vartheta_2 + i\sin\mu\vartheta_2) \\
&= [r_1 (\cos\vartheta_1 + i\sin\vartheta_1)]^\mu [r_2 (\cos\vartheta_2 + i\sin\vartheta_2)]^\mu
\end{aligned}$$

und wenn man hier das jenseits des Identitätszeichens Stehende mit dem letzten Ausdrucke vergleicht, so erhellt auf der Stelle, dafs diefs nichts Anderes ist, als die Ausdehnung des oben genannten Satzes auf imaginäre $x$ und $y$.

## §. 41.

### Auflösung der Gleichungen

$$x^n = 1 \text{ und } \sqrt[n]{x^m} = 1.$$

Eine der einfachsten Anwendungen, welche sich von den Sätzen der vorigen Paragraphen machen lassen, ist die Auflösung der Gleichungen

$$x^n = 1 \text{ und } \sqrt[n]{x^m} = 1,$$

d. h. die Aufsuchung ihrer reellen und imaginären Wurzeln.

I. Da die Wurzeln der Gleichung $x^n = 1$ im Allgemeinen auch imaginär sein können, so wollen wir

$$x = r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta) \qquad (1)$$

setzen, wo noch $r$ und $\vartheta$ zu bestimmen sind.

Da nun $x^n = 1$ sein soll, so folgt hieraus

$$1 = r^n(\cos n\vartheta + i\sin n\vartheta) \qquad (2)$$

Diese Gleichung läfst sich leicht dadurch befriedigen, dafs man nimmt

$$r = 1 \text{ und } n\vartheta = \pm 2k\pi$$

wo $k$ jede ganze positive Zahl bedeuten kann. Denn man hat dann $r^n = 1$, $\cos n\vartheta = \cos 2k\pi = +1$, $\sin n\vartheta = \sin 2k\pi = 0$, wodurch sich die Gleichung auf die Identität $1 = r$ reduzirt. Aus $n\vartheta = \pm 2k\pi$ folgt aber $\vartheta = \pm \frac{2k}{n}\pi$, folglich nach (1)

$$x = \cos\frac{2k}{n}\pi \pm i\sin\frac{2k}{n}\pi \qquad (3)$$

Digitized by Google

wo nun $k$ jede beliebige positive Zahl bedeuten kann. Hieraus scheint zu folgen, dafs es unendlich viel verschiedene Werthe für $x$ und mithin unendlich viel Auflösungen der Gleichung (1) giebt; in der That aber ist diefs gar nicht der Fall, sondern die Anzahl der von einander wirklich verschiedenen Werthe von $x$ ist nur eine begränzte und zwar $= n$. Man überzeugt sich hiervon leicht durch folgende Betrachtungen.

Ist $n$ eine gerade Zahl, so kann man die auf einander folgenden Werthe von $k$ auf folgende Weise gruppiren:

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots\ \frac{n}{2}-2,\ \frac{n}{2}-1,\ \frac{n}{2},$$

$$\frac{n}{2}+1,\ \frac{n}{2}+2,\ \ldots\ n-2,\ n-1,\ n,$$

$$n+1,\ n+2,\ \ldots\ \frac{3n}{2}-2,\ \frac{3n}{2}-1,\ \frac{3n}{2},$$

$$\frac{3n}{3}+1,\ \frac{3n}{2}+2,\ \ldots\ 2n-2,\ 2n-1,\ 2n,$$

u. s. f.

die sich auch so darstellen lassen:

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots\ \frac{n}{2}-2,\ \frac{n}{2}-1,\ \frac{n}{2},$$

$$n-\left(\frac{n}{2}-1\right),\ n-\left(\frac{n}{2}-2\right),\ \ldots\ n-2,\ n-1,\ n,$$

$$n+1,\ n+2,\ \ldots\ n+\left(\frac{n}{2}-2\right),\ n+\left(\frac{n}{2}-1\right),\ \frac{3n}{2},$$

$$2n-\left(\frac{n}{2}-1\right),\ 2n-\left(\frac{n}{2}-2\right),\ \ldots\ 2n-2,\ 2n-1,\ 2n$$

u. s. f.

Die erste Horizontalreihe giebt nun für $x$ folgende Werthe:

$$\left.\begin{array}{c} 1,\ \cos\frac{2}{n}\pi \pm i\sin\frac{2}{n}\pi,\ \cos\frac{4}{n}\pi \pm i\sin\frac{4}{n}\pi,\ \ldots \\ \ldots\ \cos\frac{n-4}{n}\pi \pm i\sin\frac{n-4}{n}\pi,\ \cos\frac{n-2}{n}\pi \pm i\sin\frac{n-2}{n}\pi,\ -1 \end{array}\right\} \quad (4)$$

Nimmt man jetzt für $k$ in (3) die Werthe der zweiten Horizontalreihe und bemerkt, dafs für jedes $h$ $\cos(2\pi \mp h\pi) = \cos h\pi$ und $\sin(2\pi \pm h\pi) = \sin h\pi$ ist, so erhält man der Reihe nach

Digitized by Google

$$\cos\left(2\pi-\frac{n-2}{n}\pi\right)\pm i\sin\left(2\pi-\frac{n-2}{n}\pi\right)=\cos\frac{n-2}{n}\pi\pm i\sin\frac{n-2}{n}\pi$$

$$\cos\left(2\pi-\frac{n-4}{n}\pi\right)\pm i\sin\left(2\pi-\frac{n-4}{n}\pi\right)=\cos\frac{n-4}{n}\pi\pm i\sin\frac{n-4}{n}\pi$$

u. s. f.

d. h. man bekommt die schon gefundenen Werthe von $x$ in (4) noch einmal in umgekehrter Ordnung. Nimmt man für $k$ die Zahlen der dritten Horizontalreihe, so erhält man wieder die Werthe in (4), aber in der nämlichen Ordnung; substituirt man die Zahlen der vierten Reihe für $k$, so bekommt man wieder die Werthe (4), aber in umgekehrter Ordnung u. s. f. — Da wir also durch weitere Fortsetzung nichts Neues erhalten, so haben wir für $x$, blos die in (4) aufgezählten, wirklich von einander verschiedenen Werthe, deren Anzahl $n$ beträgt. Bemerkt man noch, dafs aus $x^n=1$ folgt $x=\sqrt[n]{1}$, so können wir jetzt sagen:

Für ein gerades $n$ hat $\sqrt[n]{+1}$ folgende $n$ Werthe:

$$\left.\begin{array}{ll} +1, & -1 \\ \cos\frac{2}{n}\pi+i\sin\frac{2}{n}\pi, & \cos\frac{2}{n}\pi-i\sin\frac{2}{n}\pi \\ \cos\frac{4}{n}\pi+i\sin\frac{4}{n}\pi, & \cos\frac{4}{n}\pi-i\sin\frac{4}{n}\pi \\ \cos\frac{6}{n}\pi+i\sin\frac{6}{n}\pi, & \cos\frac{6}{n}\pi-i\sin\frac{6}{n}\pi \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ \cos\frac{n-2}{n}\pi+i\sin\frac{n-2}{n}\pi, & \cos\frac{n-2}{n}\pi-i\sin\frac{n-2}{n}\pi \end{array}\right\}(5)$$

Für ein ungerades $n$ lassen sich die Werthe des $k$ folgendermafsen gruppiren:

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots\ldots\ \frac{n-3}{2},\quad \frac{n-1}{2}$$

$$n-\frac{n-1}{2},\ n-\frac{n-3}{n},\ \ldots\ n-2,\quad n-1$$

$$n,\ n+1,\ n+2,\ \ldots\ldots\ n+\frac{n-3}{2},\ n+\frac{n-1}{2}$$

u. s. f.

Mittelst der Formel (3) bekommt man hier aus der ersten Horizontalreihe für $x$ die Werthe:

Digitized by Google

$$\left.\begin{array}{c} 1,\ \cos\frac{2}{n}\pi \pm i\sin\frac{2}{n}\pi,\ \cos\frac{4}{n}\pi \pm i\sin\frac{4}{n}\pi,\ \ldots \\ \ldots\ \cos\frac{n-3}{n}\pi \pm i\sin\frac{n-3}{n}\pi,\ \cos\frac{n-1}{n}\pi \pm i\sin\frac{n-1}{n}\pi \end{array}\right\} (6)$$

aus der zweiten Horizontalreihe:

$$\cos\left(2\pi-\frac{n-1}{n}\pi\right) \pm i\sin\left(2\pi-\frac{n-1}{n}\pi\right) = \cos\frac{n-1}{n}\pi \pm i\sin\frac{n-1}{n}\pi$$

$$\cos\left(2\pi-\frac{n-3}{n}\pi\right) \pm i\sin\left(2\pi-\frac{n-3}{n}\pi\right) = \cos\frac{n-3}{n}\pi \pm i\sin\frac{n-3}{n}\pi$$

u. s. f.

d. h. die nämlichen Werthe wie in (6), nur in umgekehrter Ordnung. Ebenso würde man aus der dritten Horizontalreihe wieder die Werthe (6) in derselben Ordnung erhalten u. s. f. Als wirklich verschiedene Werthe bleiben uns also blos die in (6) stehenden, deren Anzahl $n$ beträgt. Wir können also folgendes Theorem aussprechen:

Für ein ungerades $n$ hat $\sqrt[n]{+1}$ folgende $n$ Werthe:

$$\left.\begin{array}{cc} +1, & \\ \cos\frac{2}{n}\pi + i\sin\frac{2}{n}\pi, & \cos\frac{2}{n}\pi - i\sin\frac{2}{n}\pi \\ \cos\frac{4}{n}\pi + i\sin\frac{4}{n}\pi, & \cos\frac{4}{n}\pi - i\sin\frac{4}{n}\pi \\ \cos\frac{6}{n}\pi + i\sin\frac{6}{n}\pi, & \cos\frac{6}{n}\pi - i\sin\frac{6}{n}\pi \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ \cos\frac{n-1}{n}\pi + i\sin\frac{n-1}{n}\pi, & \cos\frac{n-1}{n}\pi - i\sin\frac{n-1}{n}\pi \end{array}\right\} (7)$$

In allen Fällen, wo sich die Theilung des Kreises in $2n$ Theile geometrisch ausführen läfst, kann man die in (5) und (7) vorkommenden Cosinus und Sinus algebraisch ausdrücken. So erhält man z. B. aus (5) für $n=6$, als die Werthe von $\sqrt[6]{+1}$,

$$\begin{array}{cc} +1, & -1 \\ \cos\frac{1}{3}\pi + i\sin\frac{1}{3}\pi, & \cos\frac{1}{3}\pi - i\sin\frac{1}{3}\pi \\ \cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi, & \cos\frac{2}{3}\pi - i\sin\frac{2}{3}\pi \end{array}$$

d. i.

Digitized by Google

$$+1, \qquad -1$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3}\,.\,\sqrt{-1}, \qquad \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{3}\,.\,\sqrt{-1}$$

$$-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3}\,.\,\sqrt{-1}, \qquad -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{3}\,.\,\sqrt{-1}$$

Nimmt man in Formel (7) $n=5$, und beachtet, dafs aus der Construktion des regulären Fünfecks

$$\cos\frac{1}{5}\pi=\frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

gefunden wird, woraus man leicht $\cos\frac{2}{5}\pi$, $\cos\frac{4}{5}\pi$ und $\sin\frac{2}{5}\pi$, $\sin\frac{4}{5}\pi$ ableitet, so finden sich folgende Werthe für $\sqrt[5]{+1}$:

$$+1,$$

$$\frac{\sqrt{5}-1}{4}+\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\sqrt{-1}, \qquad \frac{\sqrt{5}-1}{4}-\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\sqrt{-1}$$

$$-\frac{\sqrt{5}+1}{4}+\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}\sqrt{-1}, \qquad -\frac{\sqrt{5}+1}{4}-\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}\sqrt{-1}$$

II. Es hat nun auch keine Schwierigkeit, die Wurzeln der allgemeinen Gleichung

$$x^{\frac{n}{m}}=1$$

d. h. die verschiedenen Werthe der Wurzel $\sqrt[n]{(+1)^m}$ zu finden. Da nämlich

$$\sqrt[n]{(+1)^m}=(+1)^{\frac{m}{n}}=\left[(+1)^{\frac{1}{n}}\right]^m$$

ist, so braucht man nur die für $(+1)^{\frac{1}{n}}$ gefundenen Ausdrücke auf die $m$te Potenz zu erheben, oder, was vermöge des Moivre'schen Theoremes auf das Nämliche hinausläuft, statt $\pi$ in den Formeln (3), (5) und (7) $2n\pi$ zu substituiren.

Da nach unserer Definition

$$(+1)^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{(+1)^{\frac{m}{n}}}$$

ist, so kann man jetzt auch die Gleichung $x^{-\frac{n}{m}}=1$ auflösen. Es ist nämlich

Digitized by Google

$$x = \frac{1}{(+1)^{\frac{m}{n}}} = \frac{1}{\cos\frac{2mk}{n}\pi \pm i\sin\frac{2mk}{n}\pi}$$

d. i.

$$x = \cos\frac{2mk}{n}\pi \mp i\sin\frac{2mk}{n}\pi$$

woraus man sieht, dafs die Gröfse $(+1)^{-\frac{m}{n}}$ die nämlichen $n$ Werthe hat wie $(+1)^{\frac{m}{n}}$.

Lassen wir $m$ und $n$ so ins Unendliche wachsen, dafs sich der Bruch $\frac{m}{n}$ einer irrationalen Gränze $\mu$ nähert, so wird die Anzahl der Werthe von $(+1)^{\mu}$ unendlich und wir bekommen

$$(+1)^{\mu} = \cos 2\mu k\pi \pm i\sin 2\mu k\pi$$

wo man nun für $k$ alle möglichen positiven ganzen Zahlen setzen kann, ohne jemals einem schon gefundenen Werthe zum zweiten Male zu begegnen.

Hat man allgemein für ein beliebiges rationales oder irrationales $\mu$ die Werthe von $(\alpha + \beta i)^{\mu}$ zu bestimmen, so bringe man $\alpha + \beta i$ auf die Form $(+1)\ r(\cos\theta + i\sin\theta)$; dann ist

$$(\alpha + \beta i)^{\mu} = (+1)^{\mu}\, r^{\mu}\, (\cos\theta + i\sin\theta)^{\mu}$$
$$= (+1)^{\mu}\, r^{\mu}\, (\cos\mu\theta + i\sin\mu\theta)$$

wo man nun für $r^{\mu}$ den einen absoluten Werth dieser Gröfse und für $(+1)^{\mu}$ das zu setzen hat, was wir für die verschiedenen Fälle gefunden haben.

## §. 42.

### Auflösung der Gleichungen

$$x^n = -1 \text{ und } x^{\frac{n}{m}} = -1.$$

**I.** Da die Gleichung $x^n = -1$, worin $n$ eine ganze positive Zahl bedeutet, auch imaginäre Wurzeln haben kann, so wollen wir

$$x = r(\cos\theta + i\sin\theta) \qquad (1)$$

setzen und $r$ und $\theta$ zu bestimmen suchen. Da nun $x^n = -1$ werden soll, so mufs auch

$$r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = -1$$

sein. Dieser Gleichung kann man Genüge leisten, wenn man $r = 1$ und

Digitized by Google

$n\theta = \pm (2k+1)\pi$ nimmt, worin für $k$ jede ganze positive Zahl gesetzt werden darf. Es folgt hieraus $\theta = \pm \frac{2k+1}{n}\pi$, mithin aus (1)

$$x = \cos \frac{2k+1}{n}\pi \pm i \sin \frac{2k+1}{n}\pi. \qquad (2)$$

Da hier $k$ jede beliebige positive ganze Zahl sein kann, so scheint zu folgen, dafs es eine unbegränzte Menge von Auflösungen geben müsse. Indessen reduzirt sich ihre Zahl von selbst auf eine endliche Gröfse, wie man aus folgenden Betrachtungen sieht, die den im vorigen Paragraphen durchgeführten ganz ähnlich sind.

1) Für ein gerades $n$ kann man die Werthe von $k$ folgendermafsen gruppiren:

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots\ldots\ \frac{n}{2}-2,\ \frac{n}{2}-1,$$

$$n-\frac{n}{2},\ n-\left(\frac{n}{2}-1\right),\ \ldots\ n-2,\ n-1,$$

$$n,\ n+1,\ \ldots\ldots\ n+\left(\frac{n}{2}-2\right),\ n+\left(\frac{n}{2}-1\right),$$

$$2n-\frac{n}{2},\ 2n-\left(\frac{n}{2}-1\right),\ \ldots\ 2n-2,\ 2n-1,$$

u. s. f.

Setzt man für $k$ in Formel (2) die Werthe der ersten Horizontalreihe, so erhält man für $x$ der Reihe nach:

$$\left.\begin{array}{l} \cos\frac{1}{n}\pi \pm i\sin\frac{1}{n}\pi,\ \cos\frac{3}{n}\pi \pm i\sin\frac{3}{n}\pi,\ \ldots \\ \ldots\ \cos\frac{n-3}{n}\pi \pm i\sin\frac{n-3}{n}\pi,\ \cos\frac{n-1}{n}\pi \pm i\sin\frac{n-1}{n}\pi \end{array}\right\} (3)$$

Aus der zweiten Horizontalreihe erhält man für $x$ die Werthe

$$\cos\left(2\pi-\frac{n-1}{n}\pi\right) \pm i\sin\left(2\pi-\frac{n-1}{n}\right)\pi = \cos\frac{n-1}{n}\pi \pm i\sin\frac{n-1}{n}\pi$$

$$\cos\left(2\pi-\frac{n-3}{n}\pi\right) \pm i\sin\left(2\pi-\frac{n-3}{n}\right)\pi = \cos\frac{n-3}{n}\pi \pm i\sin\frac{n-3}{n}\pi$$

u. s. f.

d. h. die nämlichen wie in (3), nur in umgekehrter Ordnung. Die Werthe von $k$ in der dritten Horizontalreihe liefern für $x$ die Ausdrücke:

Digitized by Google

$$\cos\left(2\pi+\frac{1}{n}\pi\right)\pm i\sin\left(2\pi+\frac{1}{n}\pi\right)=\cos\frac{1}{n}\pi\pm i\sin\frac{1}{n}\pi$$

$$\cos\left(2\pi+\frac{3}{n}\pi\right)\pm i\sin\left(2\pi+\frac{3}{n}\pi\right)=\cos\frac{3}{n}\pi\pm i\sin\frac{3}{n}\pi$$

u. s. f.

d. h. die Werthe aus (3) in derselben Ordnung. Auf diese Weise fortgehend, findet man immer die nämlichen Werthe für $x$, die wir in (3) kennen gelernt haben, bald in umgekehrter, bald in derselben Ordnung. Wirklich verschiedene Werthe sind also blos die in (3), deren Anzahl $n$ ist. Bemerkt man noch, dafs aus $x^n=-1$ folgt $x=\sqrt[n]{-1}$, so kann man sagen:

Für ein gerades $n$ hat $\sqrt[n]{-1}$ folgende $n$ Werthe:

$$\left.\begin{array}{ll}
\cos\frac{1}{n}\pi+i\sin\frac{1}{n}\pi, & \cos\frac{1}{n}\pi-i\sin\frac{1}{n}\pi\\
\cos\frac{3}{n}\pi+i\sin\frac{3}{n}\pi, & \cos\frac{3}{n}\pi-i\sin\frac{3}{n}\pi\\
\cos\frac{5}{n}\pi+i\sin\frac{5}{n}\pi, & \cos\frac{5}{n}\pi-i\sin\frac{5}{n}\pi\\
\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\\
\cos\frac{n-1}{n}\pi+i\sin\frac{n-1}{n}\pi, & \cos\frac{n-1}{n}\pi-i\sin\frac{n-1}{n}\pi
\end{array}\right\}(4)$$

welche sämmtlich imaginär sind, wie man ohnehin daraus sieht, dafs jede mögliche Zahl, auf eine gerade Potenz erhoben, eine positive Gröfse liefert.

2) Für ein ungerades $n$ lassen sich die Werthe von $k$ so schreiben:

$$0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ldots\ \frac{n-5}{2},\ \frac{n-3}{2},\ \frac{n-1}{2},$$

$$n-\frac{n-1}{2},\ n-\frac{n-3}{2},\ \ldots\ldots\ldots\ n-2,\ n-1,$$

$$n,\ n+1,\ \ldots\ldots\ n+\frac{n-3}{2},\ n+\frac{n-1}{2},$$

u. s. f.

Nimmt man für $k$ die Werthe der ersten Horizontalreihe, so ergeben sich nach (2) folgende Werthe von $x$:

$$\left.\begin{array}{l}
\cos\frac{1}{n}\pi\pm i\sin\frac{1}{n}\pi,\ \cos\frac{3}{n}\pi\pm i\sin\frac{3}{n}\pi,\ \ldots\\
\ldots\cos\frac{n-4}{n}\pi\pm i\sin\frac{n-4}{n}\pi,\ \cos\frac{n-2}{n}\pi\pm i\sin\frac{n-2}{n}\pi,\ -1
\end{array}\right\}(5)$$

Digitized by Google

Aus der zweiten Horizontalreihe findet man:

$$\cos\left(2\pi - \frac{n-2}{n}\pi\right) \pm i \sin\left(2\pi - \frac{n-2}{n}\pi\right) = \cos\frac{n-2}{n}\pi \pm i \sin\frac{n-2}{n}\pi$$

$$\cos\left(2\pi - \frac{n-4}{n}\pi\right) \pm i \sin\left(2\pi - \frac{n-4}{n}\pi\right) = \cos\frac{n-4}{n}\pi \pm i \sin\frac{n-4}{n}\pi$$

u. s. f.

d. h. die Ausdrücke in (5), mit Ausnahme des letzten, nur in umgekehrter Ordnung. Die dritte Horizontalreihe für $k$ würde für $x$ genau dieselben Werthe liefern, wie die in (5) schon gefundenen u. s. f. Als wirklich verschiedene Werthe bleiben also blos die in (5) stehen und folglich kann man sagen:

Für ein ungerades $n$ hat $\sqrt[n]{-1}$ folgende $n$ Werthe:

$$-1,$$

$$\left.\begin{array}{ll} \cos\frac{1}{n}\pi + i\sin\frac{1}{n}\pi, & \cos\frac{1}{n}\pi - i\sin\frac{1}{n}\pi \\ \cos\frac{3}{n}\pi + i\sin\frac{3}{n}\pi, & \cos\frac{3}{n}\pi - i\sin\frac{3}{n}\pi \\ \cos\frac{5}{n}\pi + i\sin\frac{5}{n}\pi, & \cos\frac{5}{n}\pi - i\sin\frac{5}{n}\pi \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ \cos\frac{n-2}{n}\pi + i\sin\frac{n-2}{n}\pi, & \cos\frac{n-2}{n}\pi - i\sin\frac{n-2}{n}\pi \end{array}\right\} (6)$$

von denen nur einer, nämlich $-1$, reell ist.

Auch hier ist es leicht, in solchen Fällen, wo sich die Theilung des Kreises in $2n$ Theile geometrisch construiren läfst, die Werthe der einzelnen Cosinus und Sinus algebraisch darzustellen. So erhält man z. B. für $n = 4$ aus (4) folgende Werthe von $\sqrt[4]{-1}$:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{-1}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{-1}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{-1}, \quad -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{-1}$$

und aus (6) für $n = 3$ folgende Ausdrücke für $\sqrt[3]{-1}$:

$$-1,$$

$$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{-1}, \quad \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{-1}.$$

Digitized by Google

II. Hat man die Gleichung $x^{\frac{n}{m}} = -1$ aufzulösen, d. h. die Werthe von $(-1)^{\frac{m}{n}}$ aufzusuchen, so braucht man vermöge der Gleichung

$$(-1)^{\frac{m}{n}} = \left[(-1)^{\frac{1}{n}}\right]^m$$

nur die für $(-1)^{\frac{1}{n}}$ gefundenen Werthe auf die $m$te Potenz zu erheben, oder, was das Nämliche ist, in derselben $m\pi$ für $\pi$ zu setzen.

Ebenso findet man

$$(-1)^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{(-1)^{\frac{m}{n}}} = \frac{1}{\cos\frac{m(2k+1)}{n}\pi \pm i\sin\frac{m(2k+1)}{n}\pi}$$

$$= \cos\frac{m(2k+1)}{n}\pi \mp i\sin\frac{m(2k+1)}{n}\pi$$

Läfst man $m$ und $n$ gleichzeitig so wachsen, dafs $\frac{m}{n}$ sich einer Irrationalzahl $\mu$ als Gränze nähert, so wird

$$(-1)^{\mu} = \cos\mu(2k+1)\pi \pm i\sin\mu(2k+1)\pi$$

wo nun für $k$ jede ganze positive Zahl gesetzt wird.

Um die Werthe von $(-\alpha-\beta i)^{\mu}$ zu bestimmen, wo $\mu$ eine ganz beliebige Gröfse bezeichnet, bringe man $-\alpha-\beta i$ auf die Form $(-1)\,r(\cos\theta + i\sin\theta)$; dann ist

$$(-\alpha-\beta i)^{\mu} = (-1)^{\mu}\,r^{\mu}(\cos\mu\theta + i\sin\mu\theta)$$

wo nun für $r^{\mu}$ der eine absolute Werth dieser Gröfse und für $(-1)^{\mu}$ das zu setzen ist, was die Formeln dieses Paragraphen im speziellen Falle verlangen.

## §. 43.

### Das Theorem von Cotes.

Durch die in den beiden vorigen Paragraphen gefundenen Resultate ist es auch möglich, die Funktionen $x^n - 1$ und $x^n + 1$ in Faktoren zu zerfällen.

Da Aufsuchung der Wurzeln von $x^n - 1 = 0$ oder $x^n + 1 = 0$ nichts Anderes als Bestimmung derjenigen Werthe von $x$ ist, für welche die Funktionen $x^n - 1$ und $x^n + 1$ sich annulliren, so können wir hier die Lehren des §. 15 in Anwendung bringen, indem wir für $f(x)$ einmal



Digitized by Google

$x^n - 1$, dann $x^n + 1$ und für $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ die Wurzeln der Gleichungen $x^n = 1$ und $x^n = -1$ setzen.

I. Bezeichnen wir nun mit $x_1, x_2, \ldots x_n$ die Wurzeln der Gleichung $x^n - 1 = 0$, so ist nach Formel (3) §. 15:

$$x^n - 1 = k(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n)$$

Die Gröfse $k$ mufs hier $= 1$ sein, weil $x^n$ den Coeffizienten 1 besitzt und bei wirklicher Ausführung der Multiplikation $k$ der Coeffizient von $x^n$ werden würde.

Setzen wir nun für $x_1, x_2, \ldots x_n$ ihre Werthe aus (5) und (7) in §. 41 und führen die angedeuteten Multiplikationen blos für zwei neben einander stehende Wurzeln aus, so erhalten wir, unter der Bemerkung, dafs

$$\left(x - \cos\frac{2k}{n}\pi - i\sin\frac{2k}{n}\pi\right)\left(x - \cos\frac{2k}{n}\pi + i\sin\frac{2k}{n}\pi\right)$$
$$= \left(x - \cos\frac{2k}{n}\pi\right)^2 - \left(i\sin\frac{2k}{n}\pi\right)^2$$
$$= x^2 - 2x\cos\frac{2k}{n}\pi + 1$$

ist, Folgendes:

Für ein gerades $n$

$$\left.\begin{array}{c} x^n - 1 \\ = (x^2 - 1)\left(x^2 - 2x\cos\frac{2}{n}\pi + 1\right)\left(x^2 - 2x\cos\frac{4}{n}\pi + 1\right)\ldots \\ \ldots\left(x^2 - 2x\cos\frac{n-2}{n}\pi + 1\right) \end{array}\right\} (1)$$

und für ein ungerades $n$

$$\left.\begin{array}{c} x^n - 1 \\ = (x - 1)\left(x^2 - 2x\cos\frac{2}{n}\pi + 1\right)\left(x^2 - 2x\cos\frac{4}{n}\pi + 1\right)\ldots \\ \ldots\left(x^2 - 2x\cos\frac{n-1}{n}\pi + 1\right) \end{array}\right\} (2)$$

Setzt man hier $\frac{x}{a}$ für $x$ und multiplizirt beiderseits mit $a^n$, so ergiebt sich noch:

Für ein gerades $n$

$$\left.\begin{array}{c} x^n - a^n \\ = (x^2 - a^2)\left(x^2 - 2ax\cos\frac{2}{n}\pi + a^2\right)\left(x^2 - 2ax\cos\frac{4}{n}\pi + a^2\right)\ldots \\ \ldots\left(x^2 - 2ax\cos\frac{n-2}{n}\pi + a^2\right) \end{array}\right\} (3)$$

Digitized by Google

und für ein ungerades $n$

$$\left.\begin{aligned} x^n - a^n \\ = (x-a)\left(x^2 - 2ax\cos\frac{2}{n}\pi + a^2\right)\left(x^2 - 2ax\cos\frac{4}{n}\pi + a^2\right)\cdots \\ \cdots\left(x^2 - 2ax\cos\frac{n-1}{n}\pi + a^2\right) \end{aligned}\right\} (4)$$

II. Etwas ganz Ähnliches läfst sich für die Funktion $x^n + 1$ leisten. Bezeichnet man mit $x_1, x_2, \ldots x_n$ die Wurzeln der Gleichung $x^n + 1 = 0$, so ist

$$x^n + 1 = (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)$$

Multiplizirt man in unserem Falle je zwei neben einander stehende Werthe von $x$ in den Formeln (4) und (6) des vorigen Paragraphen und bemerkt, dafs

$$\begin{aligned} &\left(x - \cos\frac{2k+1}{n}\pi - i\sin\frac{2k+1}{n}\pi\right)\left(x - \cos\frac{2k+1}{n}\pi + i\sin\frac{2k+1}{n}\pi\right) \\ &= \left(x - \cos\frac{2k+1}{n}\pi\right)^2 - \left(i\sin\frac{2k+1}{n}\pi\right)^2 \\ &= x^2 - 2x\cos\frac{2k+1}{n}\pi + 1 \end{aligned}$$

ist, so erhält man:

Für ein gerades $n$

$$\left.\begin{aligned} x^n + 1 \\ = \left(x^2 - 2x\cos\frac{1}{n}\pi + 1\right)\left(x^2 - 2x\cos\frac{3}{n}\pi + 1\right)\cdots \\ \cdots\left(x^2 - 2x\cos\frac{n-1}{n}\pi + 1\right) \end{aligned}\right\} (5)$$

und für ein ungerades $n$

$$\left.\begin{aligned} x^n + 1 \\ = (x+1)\left(x^2 - 2x\cos\frac{1}{n}\pi + 1\right)\left(x^2 - 2x\cos\frac{3}{n}\pi + 1\right)\cdots \\ \cdots\left(x^2 - 2x\cos\frac{n-2}{n}\pi + 1\right) \end{aligned}\right\} (6)$$

Setzt man noch $\frac{x}{a}$ an die Stelle von $x$ und multiplizirt beiderseits mit $a^n$, so ergiebt sich:

Für ein gerades $n$



Digitized by Google

$$\left.\begin{aligned} x^n + a^n \\ = \left(x^2 - 2ax\cos\frac{1}{n}\pi + a^2\right)\left(x^2 - 2ax\cos\frac{3}{n}\pi + a^2\right)\cdots \\ \cdots\left(x^2 - 2ax\cos\frac{n-1}{n}\pi + a^2\right) \end{aligned}\right\} (7)$$

und für ein ungerades $n$

$$\left.\begin{aligned} x^n + a^n \\ = (x+a)\left(x^2 - 2ax\cos\frac{1}{n}\pi + a^2\right)\left(x^2 - 2ax\cos\frac{3}{n}\pi + a^2\right)\cdots \\ \cdots\left(x^2 - 2ax\cos\frac{n-2}{n}\pi + a^2\right) \end{aligned}\right\} (8)$$

Die Sätze (3), (4), (7), (8) lassen sich auch geometrisch interpretiren und in dieser Gestalt wurden sie zuerst von Cotes († 1716) aufgestellt.

Theilt man nämlich die Peripherie eines Kreises, von einem Punkte $M$ derselben ausgehend, in $2n$ gleiche Theile und zieht von einem beliebig auf dem Durchmesser $MC$ genommenen Punkte $O$ Gerade nach allen Theilpunkten, so ist das Produkt aller Strahlen gerader Nummer: $OM \cdot OM_2 \cdot OM_4 \ldots = \overline{CM}^n - \overline{CO}^n$, wenn der Punkt $O$ innerhalb des Kreises und $= \overline{CO}^n - \overline{CM}^n$, wenn er aufserhalb desselben liegt und das Produkt aller Strahlen ungerader Nummern: $OM_1$, $OM_3$, $OM_5 \ldots$ in jedem Falle $= \overline{CO}^n + \overline{CM}^n$.

Wir wollen den Fall, wo der Punkt $O$ aufserhalb des Kreises liegt, zuerst betrachten, weil er sich unmittelbar an die Form der Gleichungen (3), (4), (7), (8) anschliefst.

Für $CO = x$, $CM = a$ ist in Fig. 34:

$$\begin{aligned} \overline{OM_1}^2 = \overline{OP}^2 + \overline{M_1P}^2 &= (x - a\cos PCM_1)^2 + (a\sin PCM_1)^2 \\ &= x^2 - 2ax\cos PCM_1 + a^2 \end{aligned}$$

Da aber der Kreis in $2n$ Theile getheilt ist, so haben wir $PCM_1 = \frac{2\pi}{2n} = \frac{1}{n}\pi$, folglich

$$\overline{OM_1}^2 = x^2 - 2ax\cos\frac{1}{n}\pi + a^2$$

Hieraus findet man auch die Werthe von $\overline{OM_2}^2$, $\overline{OM_3}^2$ u. s. f., wenn man statt des Winkels $PCM_1$ der Reihe nach $PCM_2$, $PCM_3$ u. s. f.,

Digitized by Google

d. i. $\frac{2}{n}\pi$, $\frac{3}{n}\pi$ etc. an die Stelle von $\frac{1}{n}\pi$ setzt. Es ist überhaupt, wenn $OM_k$ irgend einen der Strahlen bezeichnet,

$$\overline{OM_k}^2 = x^2 - 2ax\cos\frac{k}{n}\pi + a^2.$$

Da aber der Kreis in eine gerade Anzahl von Theilen zerlegt ist, so entspricht jedem nach einem Punkte in der oberen Hälfte gehenden Strahle ein anderer ihm gleicher in der unteren Hälfte; so ist z. B. in unserer Figur, wo $2n = 10$, $OM_1 = OM_9$, $OM_2 = OM_8$, $OM_3 = OM_7$ etc., überhaupt $OM_k = OM_{2n-k}$. Statt $\overline{OM_1}^2$, $\overline{OM_2}^2$ etc. kann man also auch $OM_1 \cdot OM_9$, $OM_2 \cdot OM_8$ etc., überhaupt $OM_k \cdot OM_{2n-k}$ setzen. Mithin wird

$$OM_k \cdot OM_{2n-k} = x^2 - 2ax\cos\frac{k}{n}\pi + a^2. \qquad (1)$$

Man erhält hieraus noch unter der Bemerkung, dafs $OM = OM_0 = OM_{2n}$ ist, für $k = 0$ $OM_0 = x - a$; für $k = n$ hat man auch $OM_n = x + a$.

I. Setzen wir $k = 0, 2, 4, \ldots n$, wobei $n$ als gerade angenommen wird, so ergiebt sich durch Multiplikation aller entstehenden Gleichungen

$$OM_0 \cdot OM_2 \cdot OM_4 \cdot OM_6 \ldots OM_{n-2} \cdot OM_n$$
$$= (x-a)\left(x^2 - 2ax\cos\frac{2}{n}\pi + a^2\right)\left(x^2 - 2ax\cos\frac{4}{n}\pi + a^2\right)\ldots$$
$$\ldots\left(x^2 - 2ax\cos\frac{n-2}{n}\pi + a^2\right)(x+a)$$

d. i. weil das erste und letzte Glied $x^2 - a^2$ zum Produkt geben, nach Formel (3)

$$OM_0 \cdot OM_2 \cdot OM_4 \ldots OM_{n-2}\, OM_n = x^n - a^n \qquad (2)$$

Wäre $n$ ungerade, so setze man in (1) $k = 0, 2, 4, \ldots n-3, n-1$, so wird

$$OM_0 \cdot OM_2 \cdot OM_4 \ldots OM_{n-1}$$
$$= (x-a)\left(x^2 - 2ax\cos\frac{2}{n}\pi + a^2\right)\left(x^2 - 2ax\cos\frac{4}{n}\pi + a^2\right)\ldots$$
$$\ldots\left(x^2 - 2ax\cos\frac{n-1}{n}\pi + a^2\right)$$

also nach Formel (4)

$$OM_0 \cdot OM_2 \cdot OM_4 \ldots OM_{n-3} \cdot OM_{n-1} = x^n - a^n.$$

Digitized by Google

Es ist mithin immer das Produkt der Strahlen gerader Nummer $=$ $\overline{CO}^n - \overline{CM}^n$.

II. Für ein gerades $n$ setzen wir in (1) $k = 1, 3, 5, \ldots n-1$, dann ist durch Multiplikation aller entstehenden Gleichungen

$$OM_1 \cdot OM_3 \cdot OM_5 \ldots OM_{n-3} \cdot OM_{n-1}$$
$$= \left(x^2 - 2ax\cos\frac{1}{n}\pi + a^2\right)\left(x^2 - 2ax\cos\frac{3}{n}\pi + a^2\right)\ldots$$
$$\ldots\left(x^2 - 2ax\cos\frac{n-1}{n}\pi + a^2\right)$$
$$= x^n + a^n$$

Für ein ungerades $n$ nehme man $k = 1, 3, 5, \ldots n$, und beachte, dafs $OM_n = x + a$ ist, so wird

$$OM_1 \cdot OM_3 \cdot OM_5 \ldots OM_{n-2} \cdot OM_n$$
$$= \left(x^2 - 2ax\cos\frac{1}{n}\pi + a^2\right)\left(x^2 - 2ax\cos\frac{3}{n}\pi + a^2\right)\ldots$$
$$\ldots\left(x^2 - 2ax\cos\frac{n-2}{n}\pi + a^2\right)(x+a)$$
$$= x^n + a^n$$

Mithin ist immer das Produkt der Strahlen ungerader Nummer $=$ $\overline{CO}^n + \overline{CM}^n$.

Liegt der Punkt $O$ im Innern des Kreises, so ändert sich blos die Betrachtung in I. Statt dafs nämlich oben $OM = x - a$ war, wird es jetzt $= a - x$. Die Gröfsen $x^2 - 2ax\cos\frac{k}{n}\pi + a^2$ ändern ihre Werthe nicht, und es besteht daher der ganze Unterschied darin, dafs in den Produkten das erste Glied $a - x$ und nicht $x - a$ ist. Diefs reduzirt sich aber leicht auf den obigen Fall, wenn man für $a - x$ setzt $-(x - a)$. Der Werth des Produktes ist dann entsprechend $-(x^n - a^n)$, d. h. $a^n - x^n = \overline{CM}^n - \overline{CO}^n$, wie im Anfang behauptet wurde.

Digitized by Google

# Capitel X.

# Die Exponenzialgröfsen und Logarithmen mit imaginären Exponenten.

## §. 44.

### Übergang von den Potenzen zu den Exponenzialgröfsen.

Nach der Episode über die Auflösung der binomischen Gleichungen und das Theorem von Cotes kehren wir nun wieder zu der Untersuchung über die Formveränderungen der Funktionen bei imaginären Veränderlichen zurück. Die Betrachtung der Exponenzialgröfsen mit imaginären Exponenten ist nach der Potenz das Nächste, was uns obliegt. Wir haben einige Relationen dieser Art bereits kennen gelernt, namentlich die wichtige Gleichung

$$\cos x + i \sin x = e^{xi}$$

es lassen sich indessen noch mehrere aufstellen und auch die vorstehende Gleichung kann auf eine andere, von der Kenntnifs der Cosinus- und Sinusreihe unabhängige Weise entwickelt werden, nämlich durch eine Combination der Formel

$$Lim\ (1 + \delta x)^{\frac{1}{\delta}} = e^x \qquad (1)$$

und des Moivre'schen Theoremes.

Vermöge des letzteren ist

$$\cos m\theta + i \sin m\theta = (\cos\theta + i \sin\theta)^m$$
$$= \cos^m\theta\,(1 + i \tan\theta)^m$$

folglich für $m\theta = x$, woraus $m = \frac{x}{\theta}$ folgt,

$$\cos x + i \sin x = (\cos\theta)^{\frac{x}{\theta}}\,(1 + i \tan\theta)^{\frac{x}{\theta}} \qquad (2)$$

und diefs gilt für jedes beliebige noch so grofse oder kleine $\theta$. Die Gleichung mufs also auch richtig bleiben, wenn wir $\theta$ bis zur Gränze Null abnehmen lassen. Um aber die Gränze zu bestimmen, welcher sich in diesem Falle der Ausdruck rechts nähert, müssen wir die einzelnen Gränzwerthe von $(\cos\theta)^{\frac{x}{\theta}}$ und $(1 + i \tan\theta)^{\frac{x}{\theta}}$ aufsuchen. Hierbei leistet uns das Theorem (1) die wesentlichsten Dienste, indem für $x = -1$ und $x = +1$ daraus folgt

Digitized by Google

$$Lim\,(1-\delta)^{\frac{1}{\delta}} = \frac{1}{e}, \quad Lim\,(1+\delta)^{\frac{1}{\delta}} = e. \qquad (3)$$

Nun ist offenbar

$$(cos\,\theta)^{\frac{x}{\theta}} = \left[(1-sin^2\,\theta)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{x}{\theta}} = (1-sin^2\,\theta)^{\frac{x}{2\theta}}$$
$$= \left[(1-sin^2\,\theta)^{\frac{1}{sin^2\,\theta}}\right]^{\frac{x}{2}\cdot\frac{sin\,\theta}{\theta}sin\,\theta}$$

Wenn nun hier $\theta$ bis zur Gränze Null abnimmt, so nähert sich auch $sin^2\theta$ der Null; wir haben also nach (3)

$$Lim\,(1-sin^2\,\theta)^{\frac{1}{sin^2\,\theta}} = \frac{1}{e}$$

ferner ist

$$Lim\,\frac{sin\,\theta}{\theta} = 1, \quad Lim\,sin\,\theta = 0$$

folglich

$$Lim\,(cos\,\theta)^{\frac{x}{\theta}} = \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{x}{2}\cdot 1\,.\,0} = 1. \qquad (4)$$

Nun haben wir auch

$$(1+i\,tan\,\theta)^{\frac{x}{\theta}} = \left[(1+i\,tan\,\theta)^{\frac{1}{i\,tan\,\theta}}\right]^{xi\frac{tan\,\theta}{\theta}}$$

Wenn hier $\theta$ die Gränze Null erreicht hat, so ist auch $tan\,\theta$ und ebenso $i\,tan\,\theta = 0$ geworden. Der Gränzwerth von

$$(1+i\,tan\,\theta)^{\frac{1}{i\,tan\,\theta}}$$

muſs daher identisch mit $Lim\,(1+\delta)^{\frac{1}{\delta}}$ für $\delta = 0$, also $= e$ sein. Aufserdem ist $Lim\,\frac{tan\,\theta}{\theta} = Lim\left(\frac{sin\,\theta}{\theta}\cdot\frac{1}{cos\,\theta}\right) = 1$, folglich

$$Lim\,(1+i\,tan\,\theta)^{\frac{x}{\theta}} = e^{xi} \qquad (5)$$

Gehen wir also in der Gleichung (2) zur Gränze für abnehmende $\theta$ über, so erhalten wir mit Benutzung der Gleichungen (4) und (5)

$$cos\,x + i\,sin\,x = e^{xi} \qquad (6)$$

also das nämliche Resultat, wie früher aus der Cosinus- und Sinusreihe. Da aber die vorstehende Ableitung desselben blos die Kenntnifs des Moivre'schen Theoremes und der Exponenzialreihe voraussetzt, so kann dieselbe auch umgekehrt als Entwickelung der Sinus- und Cosinusreihe gelten,

Digitized by Google

indem man jetzt $xi$ für $x$ in die Exponenzialreihe setzt und dann die reellen und imaginären Theile beiderseits vergleicht.

Auf gleiche Weise kann man auch aus der Gleichung

$$\cos m\theta - i \sin m\theta = (\cos\theta - i \sin\theta)^m$$

die Formel

$$\cos x - i \sin x = e^{-xi} \tag{7}$$

und dann durch Addition und Subtraktion die Relationen

$$\cos x = \frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2} \tag{8}$$

$$\sin x = \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i} \tag{9}$$

ableiten.

Es läfst sich nun leicht zeigen, dafs die Eigenschaften der Exponenzialgröfse

$$e^x \cdot e^y = e^{x+y} \text{ und } (e^x)^\mu = e^{\mu x}$$

auch dann noch gelten, wenn für $x$ und $y$ imaginäre Gröfsen gesetzt werden. Es ist nämlich

$$\begin{aligned} e^{xi} \cdot e^{yi} &= (\cos x + i \sin x)\ (\cos y + i \sin y) \\ &= \cos(x+y) + i \sin(x+y) \\ &= e^{(x+y)i} \end{aligned}$$

mithin

$$e^{xi} \cdot e^{yi} = e^{xi+yi}$$

wie bei reellen Exponenten.

Ferner hat man

$$\begin{aligned} (e^{xi})^\mu &= (\cos x + i \sin x)^\mu = \cos \mu x + i \sin \mu x \\ &= e^{\mu x i} \end{aligned}$$

ebenfalls ganz entsprechend wie bei reellen Exponenten.

Durch die letzte Gleichung wird es jetzt möglich, Ausdrücke von der allgemeineren Form $a^{xi}$ umzuwandeln. Es ist nämlich

$$a^{xi} = (e^{la})^{xi} = e^{xi\,la}$$

oder

$$a^{xi} = \cos(x\,la) + i \sin(x\,la)$$

ebenso:

$$a^{-xi} = \cos(x\,la) - i \sin(x\,la)$$

Daraus erhält man noch durch Addition und Subtraktion die Formeln

Digitized by Google

$$cos\,(x\,la) = \frac{a^{xi} + a^{-xi}}{2}$$

$$sin\,(x\,la) = \frac{a^{xi} - a^{-xi}}{2i}$$

welche den in (8) und (9) stehenden entsprechen. Man kann nun leicht zeigen, dafs überhaupt für jedes $a$ und reelle oder imaginäre $x$ und $y$

$$a^x \,.\, a^y = a^{x+y} \text{ und } (a^x)^y = a^{xy}$$

ist, wobei der Beweis dem für den Fall $a = e$ geführten ganz ähnlich bleibt.

## §. 45.

### Die imaginären Logarithmen.

Da man sich $+1$ als Faktor jeder positiven, $-1$ als Faktor jeder negativen Gröfse denken kann und überhaupt $log\,(ax) = log\,a + log\,x$ ist, so entsteht zuerst die Frage nach den Werthen von $log\,(+1)$ und $log\,(-1)$, indem man erst $a = +1$ und dann $a = -1$ setzt. Wir wollen hierbei aber nur die natürlichen Logarithmen betrachten, weil sich die Logarithmen anderer Systeme durch Multiplikation der natürlichen Logarithmen mit einem constanten Faktor (dem Modulus) leicht erzeugen lassen.

I. Da der Werth von $l(+1)$ im Allgemeinen von der Form $u + vi$ sein kann, so wollen wir

$$l(+1) = u + vi$$

setzen, $u$ und $v$ als Unbekannte ansehen und ihre Werthe zu bestimmen suchen.

Nun ist aber $e^{l(+1)} = +1$, folglich mufs auch sein

$$e^{u+vi} = 1, \text{ d. i. } e^u\,(cos\,v + i\,sin\,v) = 1.$$

Diese Gleichung läfst sich befriedigen, wenn man

$$u = 0, \quad v = \pm 2k\pi$$

nimmt, worin $k$ jede ganze positive Zahl bedeuten kann. Man hat also vermöge dieser Werthe von $u$ und $v$

$$l(+1) = \pm 2k\pi i \qquad (1)$$

d. h. der Logarithmus der positiven Einheit hat unendlich viele Werthe, von denen aber nur ein einziger, nämlich der für $k = 0$ entstehende, reell und der Null gleich ist.

II. Um die Werthe von $l(-1)$ zu finden, setze man

$$l(-1) = u + vi$$

Digitized by Google

dann ist wegen $e^{l(-1)} = -1$ auch

$$e^{u+vi} = -1 \text{ oder } e^u (\cos u + i \sin v) = -1.$$

Dieser Gleichung leistet man Genüge durch die Werthe

$$u = 0, \quad v = \pm (2k+1)\pi$$

wo $k$ jede positive ganze Zahl bezeichnen kann. Es wird hiernach

$$l(-1) = \pm (2k+1)\pi i \qquad (2)$$

d. h. der Logarithmus der negativen Einheit hat unendlich viele Werthe, von denen aber kein einziger reell ist.

III. Um die Werthe von $l(\alpha + \beta i)$ zu finden, bringe man zuerst $\alpha + \beta i$ auf die Form $r(\cos\theta + i \sin\theta)$, wobei

$$r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}, \quad \theta = Arctan \frac{\beta}{\alpha}$$

ist; dann setze man

$$l(\alpha + \beta i) = l[r(\cos\theta + i \sin\theta)] = u + vi$$

so folgt

$$\begin{aligned} e^{l(\alpha+\beta i)} &= \alpha + \beta i \\ r(\cos\theta + i \sin\theta) &= e^{u+vi} \\ &= e^u (\cos v + i \sin v) \end{aligned}$$

Diese Gleichung wird befriedigt, wenn man

$$e^u = r, \text{ folglich } u = lr$$

und

$$v = \theta \pm 2k\pi$$

setzt, worin $k$ jede positive ganze Zahl bedeuten kann. Es wird jetzt vermöge dieser Werthe von $u$ und $v$

$$l(\alpha + \beta i) = lr + (\theta \pm 2k\pi) i$$

oder

$$l(\alpha + \beta i) = \frac{1}{2} l(\alpha^2 + \beta^2) + i \, Arctan \frac{\beta}{\alpha} \pm 2ki \qquad (3)$$

wofür man auch

$$l(\alpha + \beta i) = \frac{1}{2} l(\alpha^2 + \beta^2) + i \, Arctan \frac{\beta}{\alpha} + l(+1) \qquad (4)$$

setzen kann.

Handelt es sich blos um absolute Werthe, so ist $l(+1) = 0$ für $k = 0$, also einfacher

$$l(\alpha + \beta i) = \frac{1}{2} l(\alpha^2 + \beta^2) + i \, Arctan \frac{\beta}{\alpha}. \qquad (5)$$

Hieraus lassen sich noch mancherlei Folgerungen ziehen. Für negative $\beta$ erhält man nämlich

Digitized by Google

$$l(\alpha - \beta i) = \frac{1}{2} l(\alpha^2 + \beta^2) - i \, Arctan \frac{\beta}{\alpha}. \qquad (6)$$

Addirt man beide Gleichungen, so ergiebt sich

$$l(\alpha + \beta i) + l(\alpha - \beta i) = l(\alpha^2 + \beta^2).$$

Mittelst dieser Gleichungen kann man leicht beweisen, dafs die Eigenschaft des Logarithmus

$$lx + ly = l(xy)$$

auch noch für imaginäre $x$ und $y$ gilt. Sei nämlich $\alpha + \beta i = x$, $\alpha - \beta i = y$, so folgt $\alpha = \frac{x+y}{2}$, $\beta = \frac{x-y}{2i}$, folglich

$$\alpha^2 + \beta^2 = \frac{x^2 + 2xy + y^2}{4} - \frac{x^2 - 2xy + y^2}{4} = xy$$

folglich ist nach der vorigen Gleichung auch für imaginäre $x$ und $y$

$$lx + ly = l(xy). \qquad (7)$$

Setzt man hier $xy = z$, so folgt $y = \frac{z}{x}$, mithin

$$lx + l\left(\frac{z}{x}\right) = lz$$

oder

$$lz - lx = l\frac{z}{x} \qquad (8)$$

ebenfalls wie bei reellen $z$ und $x$.

Subtrahirt man die Gleichung (6) von (5), wendet die eben gefundene Relation (8) links an und dividirt dann beiderseits mit $2i$, so ergiebt sich die wichtige Formel:

$$\frac{1}{2i} l\left(\frac{\alpha + \beta i}{\alpha - \beta i}\right) = Arctan \frac{\beta}{\alpha}. \qquad (9)$$

IV. Hätte man für ein logarithmisches System der Basis $b$ den Ausdruck $log\,(\alpha + \beta i)$, (*bas b*) zu reduziren, so setze man

$$log\,(\alpha + \beta i) = u + vi$$

dann ist

$$\alpha + \beta i = b^{u+vi} = e^{(u+vi)lb}$$

woraus folgt, indem man beiderseits die natürlichen Logarithmen nimmt,

$$l(\alpha + \beta i) = (u + vi)\, lb$$

mithin

$$u + vi = \frac{l(\alpha + \beta i)}{lb}$$

oder

Digitized by Google

$$log\,(\alpha + \beta i) = \frac{l(\alpha + \beta i)}{lb}, \quad (bas\ b)$$

also gerade wie bei reellen Veränderlichen.

Hieraus läfst sich auch leicht die allgemeine Gleichung $log\,x + log\,y = log\,(xy)$ auf ähnliche Weise wie oben für den natürlichen Logarithmus ableiten.

---

# Capitel XI.

## Die goniometrischen und cyklometrischen Funktionen mit imaginären Variabelen.

### §. 46.

#### Die goniometrischen Funktionen.

Wir können allgemein für jedes $x$ die Gleichungen

$$cos\,x = \frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2} \qquad (1)$$

$$sin\,x = \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i} \qquad (2)$$

als Definitionen von $cos\,x$ und $sin\,x$ ansehen, weil sie uns zu den nämlichen Reihen verhelfen, welche wir aus der goniometrischen Bedeutung jener Funktionen im Cap. VIII. abgeleitet haben. Demnach ist, wenn man $xi$ für $x$ setzt,

$$cos\,(xi) = \frac{e^{-x} + e^{+x}}{2} = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} \qquad (3)$$

$$sin\,(xi) = \frac{e^{-x} - e^{+x}}{2i} = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}\,i \qquad (4)$$

und dieſs bewährt sich auch, wenn man in den Reihen für den Cosinus und Sinus $xi$ an die Stelle von $x$ setzt und sie dann mit den Reihen vergleicht, die man erhält, wenn man die für $e^{x}$ und $e^{-x}$ in (3) und (4) angedeuteten Operationen mit den gleichgeltenden Reihen vornimmt.

Ebenso erhält man allgemeiner aus (1) und (2)

$$cos\,(\alpha + \beta i) = \frac{e^{(\alpha+\beta i)\,i} + e^{-(\alpha+\beta i)\,i}}{2} = \frac{e^{\alpha i-\beta} + e^{-\alpha i+\beta}}{2}$$

$$sin\,(\alpha + \beta i) = \frac{e^{(\alpha+\beta i)\,i} - e^{-(\alpha+\beta i)\,i}}{2i} = \frac{e^{\alpha i-\beta} - e^{-\alpha i+\beta}}{2i}$$

Digitized by Google

Nun ist aber

$$\frac{e^{\beta}+e^{-\beta}}{2}\cdot\frac{e^{\alpha i}+e^{-\alpha i}}{2}-\frac{e^{\beta}-e^{-\beta}}{2}\cdot\frac{e^{\alpha i}-e^{-\alpha i}}{2i}i$$
$$=\frac{e^{\alpha i-\beta}+e^{-\alpha i+\beta}}{2}$$

wovon man sich durch gewöhnliche Multiplikation leicht überzeugen kann; folglich haben wir auch

$$cos\,(\alpha+\beta i)$$
$$=\frac{e^{\beta}+e^{-\beta}}{2}\cdot\frac{e^{\alpha i}+e^{-\alpha i}}{2}-\frac{e^{\beta}-e^{-\beta}}{2}\cdot\frac{e^{\alpha i}-e^{-\alpha i}}{2i}i$$

d. i. nach (1) und (2) für $x=a$

$$cos\,(\alpha+\beta i)=\frac{e^{\beta}+e^{-\beta}}{2}\,cos\,\alpha-i\,\frac{e^{\beta}-e^{-\beta}}{2}\,sin\,\alpha. \quad (5)$$

Ähnlich hat man:

$$e^{\alpha i-\beta}-e^{-\alpha i+\beta}$$
$$=\frac{e^{\beta}+e^{-\beta}}{2}\cdot\frac{e^{\alpha i}-e^{-\alpha i}}{2i}+\frac{e^{\beta}-e^{-\beta}}{2}\cdot\frac{e^{\alpha i}+e^{-\alpha i}}{2}i$$

folglich ist auch

$$sin\,(\alpha+\beta i)$$
$$=\frac{e^{\beta}+e^{-\beta}}{2}\cdot\frac{e^{\alpha i}-e^{-\alpha i}}{2}+\frac{e^{\beta}-e^{-\beta}}{2}\cdot\frac{e^{\alpha i}+e^{-\alpha i}}{2}i$$

oder

$$sin\,(\alpha+\beta i)=\frac{e^{\beta}+e^{-\beta}}{2}\,sin\,\alpha+i\,\frac{e^{\beta}-e^{-\beta}}{2}\,cos\,\alpha. \quad (6)$$

Benutzt man die Gleichungen (3) und (4) für $x=\beta$, so ist auch

$$cos\,(\alpha+\beta i)=cos\,(\beta i)\,cos\,\alpha-sin\,(\beta i)\,sin\,\alpha$$
$$sin\,(\alpha+\beta i)=cos\,(\beta i)\,sin\,\alpha+sin\,(\beta i)\,cos\,\alpha$$

woraus man sieht, dafs die Formeln

$$cos\,(x+y)=cos\,y\,cos\,x-sin\,y\,sin\,x$$
$$sin\,(x+y)=cos\,y\,sin\,x+sin\,y\,cos\,x$$

auch dann noch gelten, wenn man imaginäre Binome für $x+y$ setzt. Da dieselben die Quelle aller übrigen Relationen unter den goniometrischen Funktionen sind, so folgt jetzt, dafs alle goniometrischen Formeln auch für imaginäre Werthe der Veränderlichen gebraucht werden können, wenn man statt $cos\,(xi)$ und $sin\,(xi)$ die Ausdrücke in (3) und (4) substituirt. So erhält man z. B. aus der Formel

Digitized by Google

$$tan\, x = \frac{sin\, x}{cos\, x}$$

wenn man statt $x$ das imaginäre Binom $\alpha + \beta i$ setzt,

$$tan\,(\alpha + \beta i) = \frac{(e^{\beta} + e^{-\beta})\, sin\, \alpha + i\,(e^{\beta} - e^{-\beta})\, cos\, \alpha}{(e^{\beta} + e^{-\beta})\, cos\, \alpha - i\,(e^{\beta} - e^{-\beta})\, sin\, \alpha} \quad (7)$$

Auch zusammengesetztere Funktionen lassen sich jetzt reduziren. So kann man z. B.

$$l\, sin\,(u + vi)$$

reduziren, wenn man in Formel (5) des vorigen Paragraphen

$$\alpha = \frac{e^{v} + e^{-v}}{2}\, sin\, u, \quad \beta = \frac{e^{v} - e^{-v}}{2}\, cos\, u$$

setzt, woraus man findet

$$\alpha^2 + \beta^2 = \frac{e^{2v} + e^{-2v}}{4} - \frac{cos\, 2u}{2}$$

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{e^{v} - e^{-v}}{e^{v} + e^{-v}}\, cot\, u$$

folglich

$$l\, sin\,(u + vi) = \frac{1}{2}\, l\left(\frac{e^{2v} + e^{-2v}}{4} - \frac{cos\, 2u}{2}\right) + i\, Arctan\left(\frac{e^{v} - e^{-v}}{e^{v} + e^{-v}}\, cot\, u\right) \quad (8)$$

und auf ähnliche Weise würde man auch $l\, cos\,(u + vi)$, $l\, tan\,(u + vi)$ etc. reduziren können.

## §. 47.

### Die cyklometrischen Funktionen.

Da wir gesehen haben, dafs der Sinus und Cosinus eines imaginären Bogens Gröfsen von der Form $A + Bi$ sind, so können wir auch umgekehrt fragen, unter welcher Form ein Bogen erscheinen wird, dessen Sinus oder Cosinus unter der genannten Form gegeben ist.

I. Sei zuerst $\alpha + \beta i$ der Sinus eines unbekannten Bogens $u + vi$, so haben wir

$$Arcsin\,(\alpha + \beta i) = u + vi \quad (1)$$

oder

$$\alpha + \beta i = sin\,(u + vi)$$

d. i.

$$\alpha + \beta i = \frac{e^{v} + e^{-v}}{2}\, sin\, u + i\, \frac{e^{v} - e^{-v}}{e}\, cos\, u.$$

Digitized by Google

Vergleichen wir hier die reellen und imaginären Theile beiderseits, so erhalten wir zwei Gleichungen, aus denen wir $u$ und $v$ zu bestimmen haben. Diefs geschieht auf folgende Weise. Es folgt aus der genannten Vergleichung

$$\frac{e^v + e^{-v}}{2} = \frac{\alpha}{\sin u}, \quad \frac{e^v - e^{-v}}{2} = \frac{\beta}{\cos u}$$

und hieraus durch Addition und Subtraktion

$$e^v = \frac{\alpha}{\sin u} + \frac{\beta}{\cos u}, \quad e^{-v} = \frac{\alpha}{\sin u} - \frac{\beta}{\cos u} \qquad (2)$$

und durch Multiplikation beider Gleichungen:

$$1 = \frac{\alpha^2}{\sin^2 u} - \frac{\beta^2}{\cos^2 u}$$

oder

$$\sin^2 u \cos^2 u = \alpha^2 \cos^2 u - \beta^2 \sin^2 u. \qquad (3)$$

woraus sich $u$ finden läfst. Setzt man $1 - \sin^2 u$ für $\cos^2 u$, so ergiebt sich

$$\sin^4 u - (1 + \alpha^2 + \beta^2) \sin^2 u = -\alpha^2$$

folglich

$$\sin^2 u = \frac{1 + \alpha^2 + \beta^2}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(1 + \alpha^2 + \beta^2)^2 - 4\alpha^2}$$

Hier läfst sich aber das Vorzeichen nicht unmittelbar bestimmen; wir schlagen daher folgenden Weg ein. Setzt man in (3) $1 - \cos^2 u$ für $\sin^2 u$, so findet sich

$$\cos^4 u - (1 - \alpha^2 - \beta^2) \cos^2 u = \beta^2$$

und folglich

$$\cos^2 u = \frac{1 - \alpha^2 - \beta^2}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(1 - \alpha^2 - \beta^2)^2 + 4\beta^2}$$

Hier läfst sich das Vorzeichen durch die einfache Bemerkung bestimmen, dafs $\cos^2 u$ eine positive Gröfse sein mufs. Wir dürfen defshalb nur das obere Zeichen nehmen, weil wir sonst das Gröfsere vom Kleineren abziehen, mithin $\cos^2 u$ negativ erhalten würden. Es ist also

$$\cos^2 u = \frac{1}{2}\left[1 - \alpha^2 - \beta^2 + \sqrt{(1 - \alpha^2 - \beta^2)^2 + 4\beta^2}\right] \qquad (4)$$

Hieraus folgt

$$\sin^2 u = \frac{1}{2}\left[1 + \alpha^2 + \beta^2 - \sqrt{(1 - \alpha^2 - \beta^2) + 4\beta^2}\right]$$

oder weil

Digitized by Google

$$(1-\alpha^2-\beta^2)^2+4\beta^2=(1+\alpha^2+\beta^2)^2-4\alpha^2$$

ist,

$$\sin^2 u=\frac{1}{2}\left[1+\alpha^2+\beta^2-\sqrt{(1+\alpha^2+\beta^2)^2-4\alpha^2}\right] \quad (5)$$

so dafs also in dem früheren Ausdrucke von $\sin^2 u$ das untere Zeichen zu nehmen ist. Es wird jetzt

$$\sin u=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\alpha^2+\beta^2-\sqrt{(1+\alpha^2+\beta^2)^2-4\alpha^2}} \quad (6)$$

$$\cos u=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\alpha^2-\beta^2+\sqrt{(1-\alpha^2-\beta^2)^2+4\beta^2}} \quad (7)$$

Ausdrücke, die wir mit $A$ und $B$ bezeichnen wollen. Haben nun aus $\sin u=A$, $u=Arcsin\, A+2k\pi$, wo $k$ jede ganze positive Zahl bedeuten kann, womit der Werth von $u$ gefunden ist. Um noch den von $v$ zu bestimmen, halten wir uns an die Gleichung (2), aus welcher folgt

$$v=l\left(\frac{\alpha}{\sin u}+\frac{\beta}{\cos u}\right)=l\left(\frac{\alpha}{A}+\frac{\beta}{B}\right)$$

Mithin haben wir jetzt

$$Arcsin\,(\alpha+\beta i)=2k\pi+Arcsin\, A+l\left(\frac{\alpha}{A}+\frac{\beta}{B}\right)i \quad (8)$$

worin für $A$ und $B$ die Ausdrücke in (6) und (7) zu setzen sind. Wir haben aber früher unter $Arcsin\, x$ immer den kleinsten aller zum Sinus $x$ gehörigen Bogen verstanden. Wollen wir dieser Bezeichnungsweise auch für $x=\alpha+\beta i$ treu bleiben, so müssen wir $k=0$ setzen und erhalten

$$Arcsin\,(\alpha+\beta i)=Arcsin\, A+l\left(\frac{\alpha}{A}+\frac{\beta}{B}\right)i. \quad (9)$$

II. Es sei ferner in der Gleichung

$$Arccos\,(\alpha+\beta i)=u+vi \quad (10)$$

die Abhängigkeit des $u$ und $v$ von $\alpha$ und $\beta$ aufzusuchen. Es folgt aus der obigen Gleichung

$$\alpha+\beta i=\cos(u+vi)$$
$$=\frac{e^v+e^{-v}}{2}\cos u-i\frac{e^v-e^{-v}}{2}\sin u$$

woraus sich durch Vergleichung der reellen und imaginären Theile die Gleichungen

$$\frac{e^v+e^{-v}}{2}=\frac{\alpha}{\cos u},\quad \frac{e^v-e^{-v}}{2}=-\frac{\beta}{\sin u}$$

ergeben, die man durch Addition und Subtraktion combinirt; es giebt dieſs



Digitized by Google

$$e^v = \frac{\alpha}{\cos u} - \frac{\beta}{\sin u}, \quad e^{-v} = \frac{\alpha}{\cos u} + \frac{\beta}{\sin u} \qquad (11)$$

und durch Multiplikation

$$1 = \frac{\alpha^2}{\cos^2 u} - \frac{\beta^2}{\sin^2 u}$$

oder

$$\sin^4 u - (1 - \alpha^2 - \beta^2) \sin^2 u = \beta^2$$

Hieraus erhält man, unter der Bemerkung, dafs $\sin^2 u$ immer positiv ist,

$$\sin^2 u = \frac{1 - \alpha^2 - \beta^2}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(1 - \alpha^2 - \beta^2)^2 + 4\beta^2}$$

und weil

$$(1 - \alpha^2 - \beta^2)^2 + 4\beta^2 = (1 + \alpha^2 + \beta^2)^2 - 4\alpha^2$$

ist,

$$\cos^2 u = \frac{1 + \alpha^2 + \beta^2}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(1 + \alpha^2 + \beta^2)^2 - 4\alpha^2}$$

Es folgt nun

$$\cos u = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1 + \alpha^2 + \beta^2 - \sqrt{(1 + \alpha^2 + \beta^2)^2 - 4\alpha^2}}$$

$$\sin u = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2 + \sqrt{(1 - \alpha^2 - \beta^2)^2 + 4\beta^2}}$$

d. i. $\cos u = A$, $\sin u = B$, wobei $A$ und $B$ die nämliche Bedeutung wie früher haben. Es ist nun $u = A + 2k\pi$ und nach (11)

$$v = l\left(\frac{\alpha}{\cos u} - \frac{\beta}{\sin u}\right) = l\left(\frac{\alpha}{A} - \frac{\beta}{B}\right)$$

folglich nach (10)

$$Arccos\,(\alpha + \beta i) = 2k\pi + Arccos\, A + i\, l\left(\frac{\alpha}{A} - \frac{\beta}{B}\right)$$

oder wenn wir unter $Arccos\,(\alpha + \beta i)$ den kleinsten aller zugehörigen Bogen verstehen,

$$Arccos\,(\alpha + \beta i) = Arccos\, A + i\, l\left(\frac{\alpha}{A} - \frac{\beta}{B}\right) \qquad (12)$$

III. Wir wollen uns nun mit einigen speziellen Fällen der gefundenen Formeln (9) und (12) beschäftigen.

Für $\beta = 0$ wird in (9)

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1 + \alpha^2 - \sqrt{(1 - \alpha^2)^2}}$$

Ist hier $\alpha < 1$, so hat man $\sqrt{(1 - \alpha^2)^2} = 1 - \alpha^2$ zu setzen, und in diesem Falle wird $A = \alpha$; ist aber $\alpha > 1$, so mufs

Digitized by Google

$$\sqrt{(1-\alpha^2)^2} = \sqrt{(\alpha^2-1)^2} = \alpha^2 - 1$$

genommen werden und dann wird $A = 1$. Ferner wird im ersten Falle $B = \sqrt{1-\alpha^2}$, folglich $\frac{\beta}{B} = 0$, im zweiten aber $B = 0$, folglich $\frac{\beta}{B} = \frac{0}{0}$. Um hier den wahren Werth zu erfahren, gehen wir folgenden Weg. Es ist

$$\frac{\beta^2}{B^2} = \frac{2\beta^2}{\sqrt{(1-\alpha^2-\beta^2)^2 + 4\beta^2} + 1 - \alpha^2 - \beta^2}$$

folglich, wenn man Zähler und Nenner mit

$$\sqrt{(1-\alpha^2-\beta^2)^2 + 4\beta^2} - (1-\alpha^2-\beta^2)$$

multiplizirt und bemerkt, dafs immer $(\sqrt{p}+q)(\sqrt{p}-q) = p - q^2$ ist,

$$\frac{\beta^2}{B^2} = \frac{\sqrt{(1-\alpha^2-\beta^2)^2 + 4\beta^2} - (1-\alpha^2-\beta^2)}{2}$$

folglich für $\beta = 0$, weil $\alpha > 1$ ist,

$$\frac{\beta^2}{B^2} = \frac{\alpha^2 - 1 - (1-\alpha^2)}{2} = \alpha^2 - 1$$

und

$$\frac{\beta}{B} = \sqrt{\alpha^2 - 1}$$

Wir haben also nach allem Bisherigen für $\alpha < 1$ und $\beta = 0$

$$A = \alpha, \quad \frac{\alpha}{A} = 1, \quad \frac{\beta}{B} = 0$$

und für $\alpha > 1$

$$A = 1, \quad \frac{\alpha}{A} = \alpha, \quad \frac{\beta}{B} = \sqrt{\alpha^2 - 1}$$

Für $\alpha < 1$ reduzirt sich daher die Gleichung (9) auf die Identität $Arcsin\ \alpha = Arcsin\ \alpha$; für $\alpha > 1$ dagegen wird

$$Arcsin\ \alpha = Arcsin\ 1 + i\,l(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1})$$

oder

$$Arcsin\ \alpha = \frac{\pi}{2} + i\,l(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1}) \qquad (13)$$

Diefs Resultat darf nicht befremden, wenn man bemerkt, dafs alle Sinus ächte Brüche sind, dafs also einem Sinus $> 1$ kein reeller Kreisbogen entsprechen kann.

Aus der Gleichung (12) erhält man für $\beta = 0$, unter der Voraussetzung $\alpha > 1$,



Digitized by Google

$$Arccos\ \alpha = i\, l(\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 1}) \qquad (14)$$

Durch Addition von (13) und (14) ergiebt sich noch

$$Arcsin\ \alpha + Arccos\ \alpha = \frac{\pi}{2} \qquad (15)$$

so dafs also die Relation $Arcsin\ x + Arccos\ x = \frac{\pi}{2}$ auch für $x > 1$ gilt.

Nimmt man $\alpha = 0$ in Formel (9), so wird $B = 1$, $A = 0$, mithin der Ausdruck $\frac{\alpha}{A} = \frac{0}{0}$. Seinen Werth erfährt man auf folgende Weise. Es ist

$$\frac{\alpha^2}{A^2} = \frac{2\alpha^2}{1 + \alpha^2 + \beta^2 - \sqrt{(1 + \alpha^2 + \beta^2)^2 - 4\alpha^2}}$$

Multiplizirt man Zähler und Nenner mit

$$1 + \alpha^2 + \beta^2 + \sqrt{(1 + \alpha^2 + \beta^2)^2 - 4\alpha^2}$$

so wird

$$\frac{\alpha^2}{A^2} = \frac{1 + \alpha^2 + \beta^2 + \sqrt{(1 + \alpha^2 + \beta^2)^2 - 4\alpha^2}}{2}$$

folglich für $\alpha = 0$

$$\frac{\alpha^2}{A^2} = 1 + \beta^2 \quad \text{und} \quad \frac{\alpha}{A} = \sqrt{1 + \beta^2}.$$

Es ist also, weil $B = 1$, $A = 0$ war,

$$Arcsin\ (\beta i) = i\, l(\sqrt{1 + \beta^2} + \beta) \qquad (16)$$

oder

$$\frac{Arcsin\ (\beta i)}{i} = l(\sqrt{1 + \beta^2} + \beta) \qquad (17)$$

wobei das Imaginäre links nur scheinbar ist. Setzt man auch in Formel (12) $\alpha = 0$, so wird

$$Arccos\ (\beta i) = \frac{\pi}{2} + i\, l(\sqrt{1 + \beta^2} - \beta) \qquad (18)$$

und

$$\left[\frac{\pi}{2} - Arccos\ (\beta i)\right] i = l(\sqrt{1 + \beta^2} - \beta) \qquad (19)$$

Addirt man die Gleichungen (16) und (18), so findet sich

$$Arcsin\ (\beta i) + Arccos\ (\beta i) = \frac{\pi}{2} \qquad (20)$$

d. h. die Relation $Arcsin\ x + Arccos\ x = \frac{\pi}{2}$ gilt auch für imaginäre Sinus.

Digitized by Google

Setzt man in Formel (13) $\alpha = \sqrt{1+\beta^2}$, so wird

$$Arcsin\sqrt{1+\beta^2} = \frac{\pi}{2} + il(\sqrt{1+\beta^2} + \beta)$$

und mit Hülfe der Gleichung (16)

$$Arcsin\sqrt{1+\beta^2} = \frac{\pi}{2} + Arcsin(\beta i) \qquad (21)$$

Diese Formel entspricht ganz einer schon bekannten. Für $y = 1$ geht nämlich die Relation

$$Arcsin(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}) = Arcsin\, y + Arcsin\, x$$

in

$$Arcsin\sqrt{1-x^2} = \frac{\pi}{2} + Arcsin\, x$$

über. Die Gleichung (21) zeigt, dafs dieselbe auch für imaginäre $x$ gilt; denn wenn man $x = \beta i$ setzt, so erhält man dieselbe aus der vorstehenden.

Nachdem wir so die Lehre von den Funktionen imaginärer Gröfsen vollständig durchgeführt haben, wollen wir nun zu den Anwendungen derselben schreiten, welche die Wichtigkeit und Brauchbarkeit derselben ins hellste Licht stellen.

---

## Capitel XII.

## Reihen, welche nach den Cosinus oder Sinus der Vielfachen eines Bogens fortschreiten.

### §. 48.

Einfachste Reihen dieser Art.

Wir haben früher verschiedene Reihen kennen gelernt, welche nach Potenzen einer Veränderlichen fortgingen und auch ihre Summen bestimmt. Die allgemeine Form aller derartigen Relationen war

$$f(x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots \qquad (1)$$

Hieraus lassen sich mit Hülfe des Moivre'schen Satzes leicht zwei andere Reihen ableiten, welche aufser den successiven Potenzen einer Veränderlichen auch noch die Sinus oder Cosinus der Vielfachen eines Bogens enthalten, wenn man nämlich

Digitized by Google

$$x = z(\cos\theta + i\sin\theta)$$

setzt, wodurch die Reihe in (1) folgende Gestalt annimmt:

$$\left.\begin{aligned} &A + Bz(\cos\theta + i\sin\theta) + Cz^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta) + \dots \\ &= A + Bz\cos\theta + Cz^2\cos 2\theta + Dz^3\cos 3\theta + \dots \\ &\quad + i[Bz\sin\theta + Cz^2\sin 2\theta + Dz^3\sin 3\theta + \dots] \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

indem sie sich in einen reellen und imaginären Theil zerlegt. Durch die Betrachtungen über die Funktionen imaginärer Binome sind wir nun in den Stand gesetzt, auch die Funktion $f(z\cos\theta + iz\sin\theta)$, wenn sie sich unter den bisher behandelten befindet, in eine reelle und imaginäre Partie zu zerlegen, so dafs

$$f(z\cos\theta + iz\sin\theta) = \varphi(z,\theta) + i\psi(z,\theta)$$

ist. Vergleichen wir diefs mit der Reihe (2), so ergiebt sich sofort:

$$\varphi(z,\theta) = A + Bz\cos\theta + Cz^2\cos 2\theta + Dz^3\cos 3\theta + \dots$$
$$\psi(z,\theta) = Bz\sin\theta + Cz^2\sin 2\theta + Dz^3\sin 3\theta + \dots$$

Ableitungen dieser Art nun, welche jedenfalls zu interessanten Reihen führen müssen, wollen wir jetzt zu bewerkstelligen suchen. Vorher aber haben wir noch Eines zu bedenken, nämlich die Convergenz der Reihen; wie sollen wir über diese da entscheiden, wo wir es mit imaginären Zahlen zu thun haben? Diese Frage können wir beantworten, wenn wir zuerst eine Untersuchung über diejenige Reihe vornehmen, welche die Basis der Convergenzbetrachtungen ausmachte, nämlich die Reihe

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots.$$

welche nur für ächt gebrochene $x$ die vorstehende Gleichung erfüllt.

Setzen wir nämlich in derselben $z(\cos\theta + i\sin\theta)$ für $x$, so theilt sich die Reihe in die folgenden zwei:

$$\left.\begin{aligned} &1 + z\cos\theta + z^2\cos 2\theta + z^3\cos 3\theta + \dots \\ &+ i(z\sin\theta + z^2\sin 2\theta + z^3\sin 3\theta + \dots) \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

und auf der linken Seite steht

$$\frac{1}{1 - z\cos\theta - iz\sin\theta}$$

Multipliziren wir Zähler und Nenner dieses Bruches mit $1 - z\cos\theta + iz\sin\theta$ und bemerken, dafs

$$(1 - z\cos\theta - iz\sin\theta)(1 - z\cos\theta + iz\sin\theta)$$
$$= (1 - z\cos\theta)^2 - (iz\sin\theta)^2 = 1 - 2z\cos\theta + z^2$$

ist, so erhalten wir

$$\frac{1 - z\cos\theta}{1 - 2z\cos\theta + z^2} + \frac{iz\sin\theta}{1 - 2z\cos\theta + z^2}$$

Digitized by Google

und folglich durch Vergleichung mit (3)

$$\frac{1 - z\cos\theta}{1 - 2z\cos\theta + z^2} = 1 + z\cos\theta + z^2\cos 2\theta + z^3\cos 3\theta + \ldots \quad (4)$$

$$\frac{z\sin\theta}{1 - 2z\cos\theta + z^2} = z\sin\theta + z^2\sin 2\theta + z^3\sin 3\theta + \ldots \quad (5)$$

Es fragt sich nun, unter welchen Bedingungen diese Gleichungen richtig bleiben. Diese Frage läfst sich leicht entscheiden, wenn man die Reihen selbst vorerst als endliche nimmt, dieselben summirt und untersucht, in welchen Fällen diese Summen sich für eine wachsende Gliederanzahl den links stehenden Gröfsen als Gränzen nähern.

Bezeichnen wir nämlich mit $S_n$ die Summe der Reihe

$$1 + z\cos\theta + z^2\cos 2\theta + z^3\cos 3\theta + \ldots + z^{n-1}\cos\overline{n-1}\,\theta \quad (6)$$

so ist durch Multiplikation mit $1 + z^2 - 2z\cos\theta$

$$(1 + z^2 - 2z\cos\theta)\,S_n$$

$$\begin{aligned}
&= 1 + z\cos\theta && - 2z\cos\theta \\
&+ z^2(\cos 2\theta + 1) && - 2z^2\cos\theta\cos\theta \\
&+ z^3(\cos 3\theta + \cos\theta) && - 2z^3\cos 2\theta\cos\theta \\
&+ z^4(\cos 4\theta + \cos 2\theta) && - 2z^4\cos 3\theta\cos\theta \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots && - \ldots\ldots\ldots \\
&+ z^{n-1}(\cos\overline{n-1}\,\theta + \cos\overline{n-3}\,\theta) && - 2z^{n-1}\cos\overline{n-2}\,\theta\cos\theta \\
&+ z^n\cos\overline{n-2}\,\theta + z^{n+1}\cos\overline{n-1}\,\theta && - 2z^n\cos\overline{n-1}\,\theta\cos\theta
\end{aligned}$$

wobei die erste Vertikalreihe durch Multiplikation mit $1 + z^2$, die zweite durch Multiplikation mit $-2z\cos\theta$ entsteht. Zerlegt man in dieser jedes doppelte Cosinusprodukt nach der Formel

$$2\cos m\theta\cos\theta = \cos\overline{m+1}\,\theta + \cos\overline{m-1}\,\theta$$

so heben sich die in einer Horizontallinie stehenden Glieder vollständig gegen einander, mit Ausnahme der ersten und letzten Glieder. Es bleibt demnach

$$(1 + z^2 - 2z\cos\theta)\,S_n = 1 - z\cos\theta + z^{n+1}\cos\overline{n-1}\,\theta - z^n\cos n\theta$$

folglich

$$S_n = \frac{1 - z\cos\theta}{1 - 2z\cos\theta + z^2} - \frac{\cos n\theta - z\cos\overline{n-1}\,\theta}{1 - 2z\cos\theta + z^2}\,z^n \quad (7)$$

womit die Summe der Reihe (6) gefunden ist. Lassen wir nun in (6) die Gliederanzahl $n$ ins Unendliche wachsen, so geht die Reihe in die auf der rechten Seite in (4) stehende über. Wollen wir aber in unserer Summe

Digitized by Google

(7) $n$ ins Unendliche wachsen lassen, so haben wir drei Fälle zu unterscheiden, ob nämlich $z > 1$, $z = 1$ oder $z < 1$ ist. Im ersten Falle ist offenbar

$$Lim \frac{cos\, n\theta - z\, cos\, \overline{n-1}\,\theta}{1 - 2z\, cos\, \theta + z^2} z^n = \infty$$

mithin die ganze Summe unendlich.

Ist zweitens $z = 1$, so geht die Reihe (6) in die schon früher betrachtete §. 19, II. über, ebenso läfst sich der Ausdruck $S_n$ mit Hülfe einiger goniometrischen Formeln leicht auf die dort gegebene Form bringen. Es wird dann $Lim\ S_n$ unbestimmt, weil blos trigonometrische Funktionen darin vorkommen, welche zwischen $+1$ und $-1$ hin und her oszilliren. Die Reihe (6) ist dann ebenfalls, ins Unendliche fortgesetzt, nicht summirbar.

Für den dritten Fall $z < 1$ dagegen wird

$$Lim \frac{cos\, n\theta - z\, cos\, \overline{n-1}\,\theta}{1 - 2z\, cos\, \theta + z^2} z^n = 0$$

folglich bleibt in (7) der Ausdruck

$$\frac{1 - z\, cos\, \theta}{1 - 2z\, cos\, \theta + z^2}$$

als Summe der ins Unendliche verlängerten Reihe (6) stehen. Die bereits früher gefundene Gleichung (4) gilt also nur für ächt gebrochene $z$.

Durch ein ganz ähnliches Verfahren überzeugt man sich auch, dafs die Gleichung (5) ebenfalls nur für solche $z$ richtig bleibt, deren absolute Werthe unter der Einheit liegen.

Wir können nun von der Reihe

$$1 + z\,(cos\,\theta + i\,sin\,\theta) + z^2\,(cos\,2\theta + i\,sin\,2\theta) + \ldots$$

sagen, dafs sie für $z < 1$ convergire, weil in diesem Falle sowohl die reelle als die imaginäre Partie derselben eine convergente Reihe bildet.

Diese Bemerkung, zu welcher uns die vorige Betrachtung führte, ist für uns ein Fingerzeig, in welcher Weise wir die imaginären Reihen zu betrachten haben. Ist nämlich die Convergenz oder Divergenz einer imaginären Reihe zu entscheiden, so nimmt man ihre reelle Partie und ebenso die imaginäre für sich vor und beurtheilt die Convergenz oder Divergenz dieser zwei Reihen einzeln; die Bedingungen, unter welchen sie convergiren oder divergiren, sind zugleich die Bedingungen für die Convergenz der imaginären Reihe, wobei unter Convergenz der imaginären Reihe diejenige Eigenschaft derselben verstanden wird, vermöge deren sie einem

Digitized by Google

anderen, aber geschlossenen imaginären Ausdrucke identisch gesetzt werden kann.

Diese Regel ist von leichter Anwendung. Kennt man z. B. die Bedingungen für $x$, unter welchen die Reihe

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots \qquad (8)$$

convergirt, so werden unter denselben Bedingungen für $z$ um so mehr die Reihen

$$A + Bz\cos\theta + Cz^2\cos 2\theta + Dz^3\cos 3\theta + \ldots$$

und

$$Bz\sin\theta + Cz^2\sin 2\theta + Dz^3\sin 3\theta + \ldots$$

convergiren, und mithin ist dann die Reihe

$$A + Bz(\cos\theta + i\sin\theta) + Cz^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta) + \ldots \qquad (9)$$

ebenfalls convergent. Will man also aus einer Reihe (8) dadurch eine Reihe (9) ableiten, dafs man für die Veränderliche ein imaginäres Binom setzt, so mufs man die Bedingungen, welchen die Veränderliche, nach deren Potenzen die ursprüngliche Reihe steigt, unterworfen ist, auf den Modulus des imaginären Binomes übertragen, oder mit anderen Worten, die Bedingungen für $z$, unter welchen die Reihe

$$A + Bz(\cos\theta + i\sin\theta) + Cz^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta) + \ldots$$

als convergent anzusehen ist, sind die nämlichen, unter welchen die Reihe

$$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \ldots$$

convergirt.

Es ist nun auch sehr leicht, zu zeigen, dafs die Sätze des §. 26 ganz ungestört bleiben, wenn man statt der reellen Reihen, welche dort betrachtet wurden, imaginäre nimmt. So ist z. B. unter der dort gemachten Determination das Produkt zweier convergenten Reihen

$$\left.\begin{aligned} a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots \\ b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \ldots \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

wieder eine convergente Reihe. Multiplizirt man statt dessen die Reihen

$$\left.\begin{aligned} a_0 + a_1z(\cos\theta + i\sin\theta) + a_2z^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta) + \ldots \\ b_0 + b_1z(\cos\theta + i\sin\theta) + b_2z^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta) + \ldots \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

welche convergiren, wenn hier $z$ die Bedingungen erfüllt, welche vorher dem $x$ auferlegt waren, und ordnet das Produkt nach Potenzen von $z$, so kommen in den Coeffizienten von $z$ die nämlichen Partialprodukte $a_1b_1$, $a_1b_2$ u. s. f. vor, aber noch mit reduzirten Ausdrücken behaftet. Zerlegt man das Produkt in seinen reellen und imaginären Theil, so findet man zwei convergente Reihen, weil die Glieder derselben wegen der go-

Digitized by Google

niometrischen Faktoren kleiner als die Glieder des Produktes von den beiden Reihen in (10) sind. Folglich convergirt auch die imaginäre Reihe, welche das Produkt der beiden Reihen in (11) darstellt.

## §. 49.

### Die Binomialreihe mit imaginären Veränderlichen.

Die Rechnungsoperationen, welche wir früher vorgenommen haben, um die Summe der Reihe

$$\left.\begin{aligned} &1 + \frac{\mu}{1}x + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2}x^2 + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1.2.3}x^3 + \ldots \\ \text{oder} \\ &1 + \mu_1 x + \mu_2 x^2 + \mu_3 x^3 + \ldots \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

zu finden, sind ganz gleichförmig auf die Reihe

$$1 + \mu_1 z(\cos\theta + i\sin\theta) + \mu_2 z^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta) + \ldots \quad (2)$$

anwendbar, welche als convergent anzusehen ist, wenn $z$ hier die Bedingung erfüllt, welcher $x$ in (1) unterworfen war, wenn also $+1 > z > -1$ ist.

Jene Rechnungsoperationen bezogen sich nämlich blos auf $\mu$ und waren von der Frage, ob $x$ reell oder imaginär sei, ganz unabhängig. Da nun die Gröfse $\mu$ in der Reihe (2) auf ganz die nämliche Weise vorkommt, wie in (1), so können wir auch hier die Summe der Reihe mit $f(\mu)$ bezeichnen und finden durch die nach dem vorigen Paragraphen erlaubte Multiplikation zweier Reihen, welche dadurch aus (2) entstehen, dafs man einmal $\alpha$ und dann $\beta$ für $\mu$ setzt, ganz wie früher die Gleichung

$$f(\alpha)f(\beta) = f(\alpha+\beta)$$

Da nun hier $\alpha$, $\beta$ reelle Gröfsen sind, also die Funktion $f(\mu)$ wenigstens in Beziehung auf $\mu$ reell ist, so haben wir

$$f(\mu) = [f(1)]^\mu$$

Der Werth von $f(1)$ wird aber aus (2) dadurch bestimmt, dafs man $\mu = 1$ nimmt, wodurch sich

$$f(1) = 1 + r\cos\theta + ir\sin\theta$$

findet. Wir haben folglich, vermöge der Bedeutung von $f(\mu)$, für $+1 > z > -1$

$$\left.\begin{aligned} &(1 + z\cos\theta + iz\sin\theta)^\mu \\ &= 1 + \mu_1 z(\cos\theta + i\sin\theta) + \mu_2 z^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta) + \ldots \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Wollen wir aber eine Vergleichung der reellen und imaginären Theile

Digitized by Google

beiderseits vornehmen, so müssen wir erst die Gröfse $1 + z\cos\theta + iz\sin\theta$ auf die Form $\varrho(\cos\zeta + i\sin\zeta)$ bringen, damit dann

$$(1 + z\cos\theta + iz\sin\theta)^{\mu} = \varrho^{\mu}(\cos\mu\zeta + i\sin\mu\zeta) \qquad (4)$$

werde, wo es nun leicht ist, den reellen und imaginären Theil heraus zu nehmen. Aus

$$1 + z\cos\theta + iz\sin\theta = \varrho\cos\zeta + i\varrho\sin\zeta$$

folgt aber

$$1 + z\cos\theta = \varrho\cos\zeta, \quad z\sin\theta = \varrho\sin\zeta$$

und hieraus durch beiderseitige Quadrirung und Addition

$$1 + 2z\cos\theta + z^2 = \varrho^2$$

$$\varrho = (1 + 2z\cos\theta + z^2)^{\frac{1}{2}} \qquad (5)$$

Ferner ist durch Division mit der ersten Gleichung in die zweite

$$\frac{z\sin\theta}{1 + z\cos\theta} = \tan\zeta$$

folglich

$$\zeta = \mathit{Arctan}\frac{z\sin\theta}{1 + z\cos\theta} \pm 2k\pi \qquad (6)$$

wo $k$ jede beliebige ganze Zahl bedeuten kann. Für diesen Werth ist nun nach (4) und (3)

$$\left.\begin{aligned}&(1 + 2z\cos\theta + z^2)^{\frac{1}{2}\mu}\ (\cos\mu\zeta + i\sin\mu\zeta)\\ &= 1 + \mu_1 z(\cos\theta + i\sin\theta) + \mu_2 z^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta) + \ldots\end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Für $z = 0$ wird hier $\zeta = \pm 2k\pi$, folglich

$$\cos(2\mu k\pi) \pm i\sin(2\mu k\pi) = 1$$

und dieſs muſs für jedes $\mu$ richtig bleiben. Das kann aber nur geschehen, wenn $k = 0$ ist, wodurch der Werth von $\zeta$ sich vereinfacht.

Für

$$\zeta = \mathit{Arctan}\frac{z\sin\theta}{1 + z\cos\theta} \qquad (8)$$

erhalten wir nun durch Vergleichung der reellen und imaginären Theile der Gleichung (7)

$$\left.\begin{aligned}&(1 + 2z\cos\theta + z^2)^{\frac{1}{2}\mu}\cos\mu\zeta\\ &= 1 + \mu_1 z\cos\theta + \mu_2 z^2\cos 2\theta + \mu_3 z^3\cos 3\theta + \ldots\end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

$$\left.\begin{aligned}&(1 + 2z\cos\theta + z^2)^{\frac{1}{2}\mu}\sin\mu\zeta\\ &= \mu_1 z\sin\theta + \mu_2 z^2\sin 2\theta + \mu_3 z^3\sin 3\theta + \ldots\ldots\end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

zwei Reihen, welche bei ganzen positiven $\mu$ abbrechen und in diesem Falle für jedes beliebige $z$ gelten, die aber für andere willkührliche $\mu$ nur so

Digitized by Google

lange der linken Seite gleich gelten, als der absolute Werth von $z$ ein ächter Bruch ist.

Dieselben enthalten mehrere Reihen, die wir schon kennen gelernt haben, als spezielle Fälle in sich. Für ein ganzes positives $\mu$ z. B. und für $z = 1$ erhält man unter der Bemerkung, dafs hier

$$\zeta = Arctan \frac{sin\,\theta}{1 + cos\,\theta} = Arctan \frac{2\,sin\frac{1}{2}\theta\,cos\frac{1}{2}\theta}{2\,cos^2\frac{1}{2}\theta}$$

$$= Arctan\,tan\frac{1}{2}\theta = \frac{1}{2}\theta$$

ist, die Reihen (9) und (12) des §. 36.

Für $\mu = -1$, also $+1 > z > -1$, mufs man beachten, dafs immer

$$Arctan\,x = Arccos\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = Arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

mithin

$$cos\,Arctan\,x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}},\quad sin\,Arctan\,x = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

ist. Man findet dann die Formeln (4) und (5) des vorigen Paragraphen.

Nimmt man ferner $\theta = \frac{\pi}{2}$, so wird $\zeta = Arctan\,z$ und

$$(1+z^2)^{\frac{1}{2}\mu}\,cos\,(\mu\,Arctan\,z)$$
$$= 1 - \mu_2 z^2 + \mu_4 z^4 - \mu_6 z^6 + \ldots$$
$$(1+z^2)^{\frac{1}{2}\mu}\,sin\,(\mu\,Arctan\,z)$$
$$= \mu_1 z - \mu_3 z^3 + \mu_5 z^5 - \ldots\ldots$$

wobei $+1 > z > -1$ sein mufs. Beachtet man aber, dafs aus $\zeta = Arctan\,z$ folgt $z = tan\,\zeta$, folglich

$$(1+z^2)^{\frac{1}{2}\mu} = (1+tan^2\zeta)^{\frac{1}{2}\mu} = \frac{1}{cos^\mu\zeta}$$

so erhält man

$$\left.\begin{array}{c}\frac{cos\,\mu\zeta}{cos^\mu\zeta}\\ = 1 - \mu_2\,tan^2\zeta + \mu_4\,tan^4\zeta - \mu_6\,tan^6\zeta + \ldots\end{array}\right\} \quad (11)$$

$$\left.\begin{array}{c}\frac{sin\,\mu\zeta}{cos^\mu\zeta}\\ = \mu_1\,tan\,\zeta - \mu_3\,tan^3\zeta + \mu_5\,tan^5\zeta - \ldots\ldots\end{array}\right\} \quad (12)$$

Digitized by Google

Gleichungen, welche nur so lange gelten, als $tang\,\zeta$ ein ächter Bruch, mithin $z$ zwischen den Gränzen $+\frac{\pi}{4}$ und $-\frac{\pi}{4}$ bleibt.

Die vorstehenden Formeln sind die fruchtbarsten für die ganze Theorie der goniometrischen Funktionen. Die zahlreichen Folgerungen, welche sich von ihnen machen lassen, werden wir später behandeln, wo wir sie noch von einer anderen Seite her kennen lernen werden.

## §. 50.

### Die Exponenzialreihe mit imaginären Veränderlichen.

Von den beiden Reihen (9) und (10) aus, welche aus der Binomialformel für eine imaginäre Veränderliche entspringen, können wir uns nun auf ähnliche Weise zur Exponenzialreihe erheben, wie dieſs früher geschehen ist.

Setzen wir nämlich $\varepsilon z$ an die Stelle von $z$ und $\mu = \frac{1}{\varepsilon}$, so wird

$$\left.\begin{aligned}&(1 + 2\varepsilon z\,cos\,\theta + \varepsilon^2 z^2)^{\frac{1}{2\varepsilon}}\,cos\,\frac{\zeta}{\mu}\\ &= 1 + \frac{1}{1}\,z\,cos\,\theta + \frac{1-\varepsilon}{1\,.\,2}\,z^2\,cos\,2\theta + \frac{(1-\varepsilon)\,(1-2\varepsilon)}{1\,.\,2\,.\,3}\,z^3\,cos\,3\theta + \ldots\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

und

$$\left.\begin{aligned}&(1 + 2\varepsilon z\,cos\,\theta + \varepsilon^2 z^2)^{\frac{1}{2\varepsilon}}\,sin\,\frac{\zeta}{\varepsilon}\\ &= \frac{1}{1}\,z\,sin\,\theta + \frac{1-\varepsilon}{1\,.\,2}\,z^2\,sin\,2\theta + \frac{(1-\varepsilon)\,(1-2\varepsilon)}{1\,.\,2\,.\,3}\,z^3\,sin\,3\theta + \ldots\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

und diese Reihen gelten, so lange $\varepsilon z$ zwischen den Gränzen $+1$ und $-1$, also $z$ zwischen $\frac{1}{\varepsilon}$ und $-\frac{1}{\varepsilon}$ liegt. Lassen wir jetzt $\varepsilon$ bis zur Gränze Null abnehmen, so bekommen wir auf der rechten Seite Reihen, welche ganz die in der Exponenzialreihe vorkommenden Coeffizienten $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{1\,.\,2}$, $\frac{1}{1\,.\,2\,.\,3}$ u. s. f. enthalten, welche aber zugleich nach Potenzen von $z$ und den Cosinus und Sinus der Vielfachen von $\theta$ fortschreiten. Wir haben nur noch die Gränzwerthe zu bestimmen, welchen sich die linken Seiten jener Gleichungen nähern. Bezeichnen wir nun $2\varepsilon z\,cos\,\theta + \varepsilon^2 z^2$ mit $\delta$, wo jetzt $\delta$ eine Gröfse ist, die gleichzeitig mit $\varepsilon$ bis zur Gränze Null abnimmt, so hat man

Digitized by Google

$$(1 + 2\varepsilon z \cos\theta + \varepsilon^2 z^2)^{\frac{1}{2\varepsilon}} = (1+\delta)^{\frac{z\cos\theta + \frac{1}{2}\varepsilon^2 z^2}{\delta}}$$

also

$$Lim\,(1 + 2\varepsilon z \cos\theta + \varepsilon^2 z^2)^{\frac{1}{2\varepsilon}} = Lim\left[(1+\delta)^{\frac{1}{\delta}}\right]^{z\cos\theta + \frac{1}{2}\varepsilon^2 z^2}$$

wo nun $\delta$ und $\varepsilon$ gleichzeitig bis zur Gränze Null zu vermindern sind. Man erhält nach §. 33, (18)

$$Lim\,(1 + 2\varepsilon z \cos\theta + \varepsilon^2 z^2)^{\frac{1}{2\varepsilon}} = e^{z\cos\theta}. \qquad (3)$$

Ferner ist jetzt

$$\zeta = Arctan\,\frac{\varepsilon z \sin\theta}{1 + \varepsilon z \cos\theta} \qquad (4)$$

folglich

$$tan\,\zeta = \frac{\varepsilon z \sin\theta}{1 + \varepsilon z \cos\theta}$$

und durch beiderseitige Multiplikation mit $\frac{\zeta}{\varepsilon\, tan\,\zeta}$

$$\frac{\zeta}{\varepsilon} = \frac{\zeta}{tan\,\zeta} \cdot \frac{z \sin\theta}{1 + \varepsilon z \cos\theta}. \qquad (5)$$

Es erhellt aber aus (4), dafs $\zeta$ eine Gröfse ist, welche mit $\varepsilon$ gleichzeitig bis zur Gränze Null abnimmt. Man hat daher

$$Lim\,\frac{\zeta}{tan\,\zeta} = Lim\,\frac{cos\,\zeta}{\frac{sin\,\zeta}{\zeta}} = 1$$

folglich nach (5)

$$Lim\,\frac{\zeta}{\varepsilon} = z \sin\theta. \qquad (6)$$

Gehen wir nun in den Gleichungen (1) und (2) zur Gränze für abnehmende $\varepsilon$ über, so ergeben sich unter Benutzung der gefundenen Gränzbestimmungen (3) und (6) die folgenden Reihen:

$$\left.\begin{aligned} &e^{z\cos\theta}\cos(z\sin\theta) \\ &= 1 + \frac{z}{1}\cos\theta + \frac{z^2}{1\cdot 2}\cos 2\theta + \frac{z^3}{1\cdot 2\cdot 3}\cos 3\theta + \ldots \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

$$\left.\begin{aligned} &e^{z\cos\theta}\sin(z\sin\theta) \\ &= \frac{z}{1}\sin\theta + \frac{z^2}{1\cdot 2}\sin 2\theta + \frac{z^3}{1\cdot 2\cdot 3}\sin 3\theta + \ldots. \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

und diese gelten für alle $z$, welche zwischen $Lim\,\frac{1}{\varepsilon}$ und $Lim\,-\frac{1}{\varepsilon}$, d. h. zwischen $+\infty$ und $-\infty$ liegen.

Digitized by Google

Nimmt man in den obigen Gleichungen $\theta = \frac{\pi}{2}$, so erhält man die Reihen für den Cosinus und Sinus, und diefs wäre wieder eine Ableitung derselben, welche von dem Cap. VIII. unabhängig ist, weil sie blos die Kenntnifs der Binomialreihe, der Exponenzialreihe und des Moivre'schen Theoremes voraussetzt.

Man kann die Formeln (7) und (8) auch noch unter etwas anderer Gestalt darstellen, wenn man nämlich $z \cos\theta = y$, $z \sin\theta = x$ setzt, woraus $\theta = Arctan\frac{x}{y}$ und $z = (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}$ folgt. Man hat dann

$$e^y \cos x = 1 + \frac{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}{1} \cos\left(Arctan\frac{x}{y}\right) + \frac{(x^2+y^2)^{\frac{2}{2}}}{1.2} \cos\left(2\,Arctan\frac{x}{y}\right) + \frac{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}{1.2.3} \cos\left(3\,Arctan\frac{x}{y}\right) + \ldots$$

$$e^y \sin x = \frac{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}{1} \sin\left(Arctan\frac{x}{y}\right) + \frac{(x^2+y^2)^{\frac{2}{2}}}{1.2} \sin\left(2\,Arctan\frac{x}{y}\right) + \frac{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}{1.2.3} \sin\left(3\,Arctan\frac{x}{y}\right) + \ldots$$

worin nun $x$ und $y$ zwei von einander unabhängige veränderliche Gröfsen darstellen.

## §. 51.

### Die Logarithmenreihe mit imaginären Veränderlichen.

Wir können den Übergang von der Binomialreihe zur logarithmischen Reihe auf ähnliche Weise bewerkstelligen, wie diefs schon früher im §. 34 geschehen ist. Durch beiderseitige Subtraktion der Einheit und nachherige Division mit $\mu$ erhalten wir nämlich aus Formel (9) §. 49:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{(1+2z\cos\theta+z^2)^{\frac{1}{2}\mu}\cos\mu\zeta-1}{\mu}\\ &= \frac{1}{1}z\cos\theta + \frac{\mu-1}{1.2}z^2\cos 2\theta + \frac{(\mu-1)(\mu-2)}{1.2.3}z^3\cos 3\theta + \ldots\end{aligned}\right\} (1)$$

Digitized by Google

und wenn wir hier $\mu$ bis zur Gränze Null abnehmen lassen, so erhalten wir rechts eine Reihe, welche die nämlichen Coeffizienten $1, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{3}$ u. s. f. enthält wie die logarithmische und aufserdem nach Potenzen von $z$ und den Cosinus der Vielfachen von $\theta$ gleichzeitig fortschreitet. Wegen

$$cos\, x = 1 - 2\, sin^2 \frac{1}{2} x$$

ist aber

$$\frac{(1 + 2z\, cos\, \theta + z^2)^{\frac{1}{2}\mu} cos\, \mu\zeta - 1}{\mu}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{(1 + 2z\, cos\, \theta + z^2)^{\frac{1}{2}\mu} - 1}{\frac{1}{2}\mu} - (1 + 2z\, cos\, \theta + z^2)^{\frac{1}{2}\mu} \cdot \frac{sin \frac{1}{2}\mu\zeta}{\frac{1}{2}\mu} sin \frac{1}{2}\mu\zeta$$

Hier ist nun $\frac{1}{2}\mu$ eine Gröfse, die mit $\mu$ gleichzeitig bis zur Gränze Null abnimmt; es wird also

$$Lim \frac{1}{2} \cdot \frac{(1 + 2z\, cos\, \theta + z^2)^{\frac{1}{2}\mu} - 1}{\frac{1}{2}\mu} = \frac{1}{2} l(1 + 2z\, cos\, \theta + z^2),$$

nach Formel (1) §. 34, und

$$Lim\, (1 + 2z\, cos\, \theta + z^2)^{\frac{1}{2}\mu} \cdot \frac{sin \frac{1}{2}\mu\zeta}{\frac{1}{2}\mu} sin \frac{\mu}{2}\zeta = 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0$$

folglich

$$Lim \frac{(1 + 2z\, cos\, \theta + z^2)^{\frac{1}{2}\mu} cos\, \mu\zeta - 1}{\frac{1}{2}\mu}$$

$$= \frac{1}{2} l(1 + 2z\, cos\, \theta + z^2).$$

Mit Hülfe dieser Gleichung ergiebt sich aus (1)

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{2} l(1 + 2z\, cos\, \theta + z^2) \\ &= z\, cos\, \theta - \frac{1}{2} z^2\, cos\, 2\theta + \frac{1}{3} z^3\, cos\, 3\theta - \ldots \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

eine Reihe, welche nur so lange gilt, als $z$ innerhalb der Gränzen $+1$ und $-1$ liegt, wie in der ursprünglichen Formel (9) §. 39.

Aus Formel (10) §. 39 findet sich ferner:

Digitized by Google

$$\left.\begin{aligned}&(1+2z\cos\theta+z^2)^{\frac{1}{2}\mu}\cdot\frac{\sin\mu\zeta}{\mu}\\ =\;&\frac{1}{1}z\sin\theta+\frac{\mu-1}{1\cdot2}z^2\sin2\theta+\frac{(\mu-1)(\mu-2)}{1\cdot2\cdot3}z^3\sin3\theta+\ldots\end{aligned}\right\}\quad(3)$$

Lassen wir hier $\mu$ bis zur Gränze Null abnehmen, so ist

$$Lim\,(1+2z\cos\theta+z^2)^{\frac{1}{2}\mu}=1$$

$$Lim\,\frac{\sin\mu\zeta}{\mu}=\zeta=Arctan\,\frac{z\sin\theta}{1+z\cos\theta}$$

folglich

$$\left.\begin{aligned}&Arctan\,\frac{z\sin\theta}{1+z\cos\theta}\\ =\;&z\sin\theta-\frac{1}{2}z^2\sin2\theta+\frac{1}{3}z^3\sin3\theta-\ldots\end{aligned}\right\}\quad(4)$$

wo nun wieder $+1>z>-1$ sein mufs.

Für $\theta=\frac{\pi}{2}$ reduzirt sich die Gleichung (2) auf eine bekannte logarithmische Reihe, die Gleichung (4) dagegen liefert ein neues Resultat, nämlich

$$Arctan\,z=z-\frac{1}{3}z^3+\frac{1}{5}z^5-\ldots\qquad(5)$$

$$z<1,$$

oder wenn man $z=tan\,x$ setzt,

$$x=tan\,x-\frac{1}{3}tan^3x+\frac{1}{5}tan^5x-\ldots\qquad(6)$$

$$x<\frac{\pi}{4}$$

eine Reihe, welche den Bogen finden lehrt, wenn man die Tangente desselben kennt, vorausgesetzt, dafs der Werth derselben die Einheit nicht übersteigt. Wir werden später auf diese merkwürdige Reihe zurückkommen.

Man kann sich leicht überzeugen, dafs die Reihen (2) und (4) auch noch für $z=\pm1$ richtig bleiben müssen. Das Binomialtheorem gilt nämlich auch dann noch für $x=\pm1$, wenn die Gröfse $\mu$ in $(1+x)^\mu$ keine negativen Werthe annimmt. Da nun bei unserem Gränzübergange $\mu$ von der positiven Seite her bis Null abnahm, so ist diese Bedingung erfüllt. Man erhält dann aus (2) für $z=+1$, unter der Bemerkung, dafs $1+cos\,\theta=2\,cos^2\frac{1}{2}\theta$ ist,



Digitized by Google

$$\left.\begin{aligned} &l2 + \frac{1}{2} l\left(cos^2 \frac{1}{2}\theta\right) \\ &= cos\,\theta - \frac{1}{2} cos\,2\theta + \frac{1}{3} cos\,3\theta - \frac{1}{4} cos\,4\theta + \ldots \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Es wäre hier falsch, statt $\frac{1}{2} l\left(cos^2 \frac{1}{2}\theta\right)$ blos $l\,cos\,\frac{1}{2}\theta$ schreiben zu wollen, weil überhaupt $\frac{1}{2} l(x^2)$ und $lx$ ganz verschiedene Funktionen sind. So würde im vorliegenden Falle $l\,cos\,\frac{1}{2}\theta$ imaginär werden, wenn $\theta > \pi$ wäre, während $\frac{1}{2} l\left(cos^2 \frac{1}{2}\theta\right)$ immer reell bleibt und auch bleiben mufs, weil die Summe der Reihe rechts immer eine reelle Gröfse sein mufs. Die gewonnene Gleichung ist übrigens von grofser Bedeutung, weil sie einen Weg zur Berechnung der sogenannten künstlichen Cosinus zeigt. Nimmt man dagegen in (2) $z = -1$ und bemerkt, dafs $1 - cos\,\theta = 2\,sin^2 \frac{1}{2}\theta$ ist, so erhält man

$$\left.\begin{aligned} &l2 + \frac{1}{2} l\left(sin^2 \frac{1}{2}\theta\right) \\ &= -cos\,\theta - \frac{1}{2} cos\,2\theta - \frac{1}{3} cos\,3\theta - \frac{1}{4} cos\,4\theta - \ldots \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

eine Gleichung, welche die Berechnung der künstlichen Sinus lehrt. Subtrahirt man noch (7) von (8) und umgekehrt (6) von (5), so ergeben sich noch die Gleichungen

$$\frac{1}{4} l\left(tan^2 \frac{1}{2}\theta\right) = -cos\,\theta - \frac{1}{3} cos\,3\theta - \frac{1}{5} cos\,5\theta - \ldots \quad (9)$$

$$\frac{1}{4} l\left(cot^2 \frac{1}{2}\theta\right) = cos\,\theta + \frac{1}{3} cos\,3\theta + \frac{1}{5} cos\,5\theta + \ldots \quad (10)$$

Eine Eigenthümlichkeit bietet die Gleichung (4) dar, wenn in ihr $z = 1$ genommen wird. Man erhält dann, unter der Bemerkung, dafs $sin\,\theta = 2\,sin\,\frac{1}{2}\theta\,cos\,\frac{1}{2}\theta$ und $1 + cos\,\theta = 2\,cos^2 \frac{1}{2}\theta$, folglich

$$\frac{sin\,\theta}{1 + cos\,\theta} = \frac{sin\,\frac{1}{2}\theta}{cos\,\frac{1}{2}\theta} = tan\,\frac{1}{2}\theta$$

ist,

Digitized by Google

$$\left.\begin{aligned} &Arctan\left(tan\frac{1}{2}\theta\right) \\ &= sin\,\theta - \frac{1}{2}sin\,2\theta + \frac{1}{3}sin\,3\theta - \frac{1}{4}sin\,4\theta + \ldots \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

Es wäre hier falsch, statt $Arctan\left(tan\frac{1}{2}\theta\right)$ allgemein $\frac{1}{2}\theta$ schreiben zu wollen. Sonst würde man z. B. für $\theta = 2\pi + \theta'$ finden

$$\pi + \frac{1}{2}\theta' = sin\,\theta' - \frac{1}{2}sin\,2\theta' + \frac{1}{3}sin\,3\theta' - \ldots$$

was offenbar falsch ist, wenn man es mit dem Vorigen vergleicht. Behält man indessen die vorige Form bei, so ist $tan\frac{1}{2}(2\pi + \theta') = tan\frac{1}{2}\theta'$, folglich $Arctan\left[tan\frac{1}{2}(2\pi + \theta')\right] = Arctan\left(tan\frac{1}{2}\theta'\right) = \frac{1}{2}\theta'$ und nun ist die Gleichung richtig. Der Grund des Fehlers liegt darin, dafs $Arctan\left(tan\frac{1}{2}\theta\right)$ und $\frac{1}{2}\theta$ verschiedene Funktionen von $\theta$ sind; die erste ist periodisch, weil die darin vorkommende Tangente eine periodische Funktion ist, die zweite wächst immer, wenn $\theta$ zunimmt. Dagegen sind $Arctan\left(tan\frac{1}{2}\theta\right)$ und $\frac{1}{2}\theta$ so lange identisch, als in den Werthen von $tan\frac{1}{2}\theta$ keine Periodicität, sondern ein beständiges Wachsthum statt findet, nämlich von $\theta = 0$ bis $\theta = \pi$, weil dann die Tangente von 0 bis $\infty$ geht. Man darf daher nur für das Intervall 0 bis $\pi$ behaupten, dafs

$$\frac{1}{2}\theta = sin\,\theta - \frac{1}{2}sin\,2\theta + \frac{1}{3}sin\,3\theta - \ldots \quad (12)$$

ist. An der Stelle $\theta = \pi$ tritt hier noch eine Unstetigkeit ein. Es hat nämlich, wie früher gezeigt wurde, $tan\frac{\pi}{2}$ zwei Werthe, $+\infty$ und $-\infty$, also hat auch $Arctan\left(tan\frac{\pi}{2}\right)$, deren zwei: $Arctan(+\infty) = \frac{\pi}{2}$ und $Arctan(-\infty) = -Arctan(\infty) = -\frac{\pi}{2}$. Die Summe der Reihe rechts in (11) kann aber doch nur einen Werth haben, und welcher ist dieser nun? Darauf antwortet die Reihe selbst sehr einfach: jedes ihrer Glieder annullirt sich für $\theta = \pi$, und also giebt sie zur Summe Null, mithin keinen



Digitized by Google

der beiden Werthe von $Arctan\left(tan\frac{\pi}{2}\right)$, sondern das arithmetische Mittel aus ihnen*). Unter der Bedingung

$$\pi > \theta \geqq 0$$

ist also

$$\frac{1}{2}\theta = sin\,\theta - \frac{1}{2}sin\,2\theta + \frac{1}{3}sin\,3\theta - \ldots \qquad (13)$$

Nimmt man in Formel (4) $z = -1$ und beachtet, dafs

$$\frac{sin\,\theta}{1-cos\,\theta} = \frac{2\,sin\frac{1}{2}\theta\,cos\frac{1}{2}\theta}{2\,sin^2\frac{1}{2}\theta} = cot\frac{1}{2}\theta = tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\theta\right)$$

ist, so erhält man

$$\left.\begin{array}{l} Arctan\left[tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\theta\right)\right] \\ = sin\,\theta + \frac{1}{2}sin\,2\theta + \frac{1}{3}sin\,3\theta + \frac{1}{4}sin\,4\theta + \ldots \end{array}\right\} \qquad (14)$$

Ist nun hier $\pi \geqq \theta > 0$, so kann man statt des Ausdruckes links einfach $\frac{\pi-\theta}{2}$ setzen und hat dann für

$$\pi \geqq \theta > 0$$

$$\frac{\pi-\theta}{2} = sin\,\theta + \frac{1}{2}sin\,2\theta + \frac{1}{3}sin\,3\theta + \ldots \qquad (15)$$

Für $\theta = 0$ gilt diese Formel nicht, weil dann die Funktion links in (14) unstetig wird und die zwei Werthe $+\frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2}$ annimmt, von denen keiner der Reihe gleich ist, welche sich hier annullirt.

Addirt man die Gleichungen (13) und (15), welche von $\theta = 0$ bis $\theta = \pi$, die erste mit Ausschliefsung des Werthes $\theta = \pi$ und die zweite mit Ausnahme von $\theta = 0$ gelten, so erhält man das merkwürdige Resultat

$$\frac{\pi}{4} = sin\,\theta + \frac{1}{3}sin\,3\theta + \frac{1}{5}sin\,5\theta + \ldots \qquad (16)$$

welches nur für $\pi > \theta > 0$, exclusive $\theta = \pi$ und $\theta = 0$ besteht.

---

*) Es ist dies eine allgemeine Eigenschaft der Reihen von der Form

$$b_1\,sin\,\theta + b_2\,sin\,2\theta + b_3\,sin\,3\theta + \ldots$$

deren allgemeine Behandlung in die Lehre von den bestimmten Integralen gehört. Man sehe meine „Beiträge zur Theorie bestimmter Integrale," wo sich eine ausführliche Untersuchung über diese Reihen findet.

Digitized by Google

Giebt man darin dem $\theta$ einen solchen Werth, dafs die Sinus der ungeraden Vielfachen von $\pi$ leicht zu berechnen sind, so erhält man eine Reihe für die Ludolph'sche Zahl. Die einfachste Annahme dieser Art ist $\theta = \frac{\pi}{2}$, wodurch man die sogenannte Leibnitz'sche Reihe

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots \qquad (17)$$

findet, welche sich auch aus der Gleichung (6) für $x = \frac{\pi}{2}$ ergiebt.

---

## Capitel XIII.

## Reihen für den Sinus oder Cosinus eines vielfachen Bogens.

### §. 52.

Transformation des Moivre'schen Satzes mit Hülfe des Binomialtheoremes.

Schreibt man die Gleichung

$$cos\,\mu x + i\,sin\,\mu x = (cos\,x + i\,sin\,x)^{\mu}$$

in der Form

$$cos\,\mu x + i\,sin\,\mu x = cos^{\mu} x\,(1 + i\,tan\,x)^{\mu} \qquad (1)$$

so ersieht man gleich, dafs sich hier das Binomialtheorem anwenden lassen wird, sobald man dafür gesorgt hat, dafs $tan\,x$ hier die Bedingungen erfülle, welchen $x$ in der Gleichung (8) §. 29 unterworfen war. Diese Bedingungen sprachen sich dort in der Ungleichung $+1 > x > -1$ aus, welche hier in $+1 > tan\,x > -1$ übergeht und aus der nun folgt, dafs der Bogen $x$ zwischen den Gränzen $+\frac{\pi}{4}$ und $-\frac{\pi}{4}$ liegen müsse.

Wir erhalten jetzt aus (1) mit Hülfe des Binomialtheoremes

$$cos\,\mu x + i\,sin\,\mu x$$
$$= cos^{\mu} x\,[\mu_0 + i\mu_1\,tan\,x - \mu_2\,tan^2\,x - i\mu_3\,tan^3\,x + \ldots]$$

und durch Vergleichung der reellen und imaginären Theile

$$cos\,\mu x$$
$$= cos^{\mu} x\,[\mu_0 - \mu_2\,tan^2\,x + \mu_4\,tan^4\,x - \mu_6\,tan^6\,x + \ldots] \qquad (2)$$

$$sin\,\mu x$$
$$= cos^{\mu} x\,[\mu_1\,tan\,x - \mu_3\,tan^3\,x + \mu_5\,tan^5\,x - \ldots\ldots] \qquad (3)$$

Digitized by Google

Formeln, welche bei ganzen positiven $\mu$ für jedes $x$, bei anderen $\mu$ aber nur für $\frac{\pi}{4} > x > -\frac{\pi}{4}$ Gültigkeit besitzen. Dieselben sind übrigens identisch mit denen, welche wir unter (11) und (12) in §. 49 kennen gelernt haben.

Man kann ihnen auch noch eine andere Gestalt geben, wenn man $\frac{\sin x}{\cos x}$ für $\tan x$ setzt und darauf die Klammern auflöst. Es ergiebt sich nämlich

$$\left.\begin{array}{l}\cos \mu x \\ = \mu_0 \cos^\mu x - \mu_2 \cos^{\mu-2} x \sin^2 x + \mu_4 \cos^{\mu-2} x \sin^4 x - \ldots\end{array}\right\} (4)$$

$$\left.\begin{array}{l}\sin \mu x \\ = \mu_1 \cos^{\mu-1} x \sin x - \mu_3 \cos^{\mu-3} x \sin^3 x - \mu_5 \cos^{\mu-5} x \sin^5 x - \ldots\end{array}\right\} (5)$$

Bei ganzen positiven $\mu$, wofür diese Formeln ohne Einschränkung gelten, könnte man sie zur Aufstellung goniometrischer Relationen benutzen, welche aus dem Sinus und Cosinus des einfachen Bogens den Sinus und Cosinus eines beliebigen Vielfachen dieses Bogens finden lehren; wir wollen uns indessen bei diesen Anwendungen nicht aufhalten und eine andere, fruchtbarere Idee verfolgen.

I. Die Reihen auf den rechten Seiten der Gleichungen (4) und (5) gehen nach Potenzen von *cos* und *sin* zugleich; die ersteren fallen, die zweiten steigen. Da nun aber der Cosinus durch den Sinus ausgedrückt werden kann und überhaupt

$$\begin{aligned}\cos^p x &= (1 - \sin^2 x)^{\frac{p}{2}} \\ &= \binom{p}{2}_0 - \binom{p}{2}_1 \sin^2 x + \binom{p}{2}_2 \sin^4 x - \ldots \quad (6)\end{aligned}$$

ist, so sieht man, dafs es wohl möglich sein mufs, die Reihen (4) und (5) in andere zu transformiren, welche nach den steigenden Potenzen von $\sin x$ fortgehen. In der That hat man nur nöthig, die einzelnen Cosinuspotenzen nach Formel (3) in Reihen zu verwandeln, wobei für die Gleichung (4) $p$ durch $\mu$, $\mu - 2$, $\mu - 4$ etc., für die Gleichung (5) durch $\mu - 1$, $\mu - 3$, $\mu - 5$ etc. zu ersetzen ist. Nimmt man noch der Kürze wegen $\sin x = y$, so erhält man jetzt

Digitized by Google

$$cos\,\mu x$$

$$= \mu_0 \left(\frac{\mu}{2}\right)_0 - \mu_0 \left(\frac{\mu}{2}\right)_1 y^2 + \mu_0 \left(\frac{\mu}{2}\right)_2 y^4 - \mu_0 \left(\frac{\mu}{2}\right)_3 y^6 + \cdots$$
$$- \mu_2 \left(\frac{\mu-2}{2}\right)_0 + \mu_2 \left(\frac{\mu-2}{2}\right)_1 - \mu_2 \left(\frac{\mu-2}{2}\right)_2 + \cdots$$
$$+ \mu_4 \left(\frac{\mu-4}{2}\right)_0 - \mu_4 \left(\frac{\mu-4}{2}\right)_1 + \cdots$$
$$- \mu_6 \left(\frac{\mu-6}{2}\right)_0 + \cdots$$

Bezeichnen wir die Coeffizienten von $y^0$, $y^2$, $y^4$ etc. mit $A_0$, $A_2$, $A_4$ etc., so ist

$$cos\,\mu x = A_0 - A_2 y^2 + A_4 y^4 - A_6 y^6 + \cdots \quad (7)$$

und überhaupt für ein ganzes positives $n$

$$A_{2n} = \mu_0 \left(\frac{\mu}{2}\right)_n + \mu_2 \left(\frac{\mu-2}{2}\right)_{n-1} + \mu_4 \left(\frac{\mu-4}{2}\right)_{n-2} + \cdots$$
$$\cdots + \mu_{2n-2} \left(\frac{\mu-2n+2}{2}\right)_1 + \mu_{2n} \left(\frac{\mu-2n}{2}\right)_0$$

Wir haben aber die Summe aller Glieder rechts schon früher auf einen geschlossenen Ausdruck gebracht; vermöge der Gleichung (13) in §. 31 ist nämlich auch

$$A_{2n} = \frac{\mu^2 (\mu^2 - 2^2)\,(\mu^2 - 4^2) \ldots (\mu^2 - \overline{2n-2}^2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots (2n)}$$

Bringen wir diefs in der Gleichung (7) für $n = 1, 2, 3, \ldots$ in Anwendung und bemerken, dafs dort $A_0 = 1$ ist, so ergiebt sich die wichtige Relation:

$$cos\,\mu x$$
$$= 1 - \frac{\mu^2}{1.2} sin^2 x + \frac{\mu^2(\mu^2-2^2)}{1.2.3.4} sin^4 x - \frac{\mu^2(\mu^2-2^2)(\mu^2-4^2)}{1.2.3.4.5.6} sin^6 x + \ldots \quad (8)$$

Dieselbe gilt für jedes $x$, wenn $\mu$ eine gerade Zahl ist, weil in diesem Falle die in (4) vorkommenden Potenzen

$$cos^{\mu} x = (1 - sin^2 x)^{\frac{\mu}{2}}, \quad cos^{\mu-2} x = (1 - sin^2 x)^{\frac{\mu-2}{2}}$$

sämmtlich ganze Exponenten bekommen, für welche das Binomialtheorem allgemein richtig ist. Für andere als gerade $\mu$ geht die Reihe rechts ins Unendliche fort und gilt dem Ausdrucke $cos\,\mu x$ nur so lange gleich, als hier $x$ der nämlichen Bedingung unterworfen ist, wie in den Formeln (2), (3), (4) und (5), nämlich $\frac{\pi}{4} > x > -\frac{\pi}{4}$.

Digitized by Google

II. Eine ganz ähnliche Transformation läfst sich auf die Gleichung (5) anwenden. Setzt man nämlich

$$cos^{\mu-1}x = (1-sin^2x)^{\frac{\mu-1}{2}}, \quad cos^{\mu-3}x = (1-sin^2x)^{\frac{\mu-3}{2}} \text{ etc.}$$

wobei $sin\,x$ der Kürze wegen $y$ heifsen möge und verwandelt alle diese Potenzen nach dem Binomialtheorem in Reihen, so ergiebt sich

$$sin\,\mu x = \mu_1\left(\frac{\mu-1}{2}\right)_0 y - \mu_1\left(\frac{\mu-1}{2}\right)_1 y^3 + \mu_1\left(\frac{\mu-1}{2}\right)_2 y^5 - \ldots$$
$$- \mu_3\left(\frac{\mu-3}{2}\right)_0 + \mu_3\left(\frac{\mu-3}{2}\right)_1 - \ldots$$
$$+ \mu_5\left(\frac{\mu-5}{2}\right)_0 - \ldots$$

Bezeichnen wir die Coeffizienten von $y$, $y^3$, $y^5$ etc. mit $A_1$, $A_3$, $A_5$ etc., so ist

$$sin\,\mu x = A_1 y - A_3 y^3 + A_5 y^5 - \ldots \qquad (9)$$

und überhaupt

$$A_{2n+1} = \mu_1\left(\frac{\mu-1}{2}\right)_n + \mu_3\left(\frac{\mu-3}{2}\right)_{n-1} + \mu_5\left(\frac{\mu-5}{2}\right)_{n-2} + \ldots$$
$$\ldots + \mu_{2n-1}\left(\frac{\mu-2n+1}{2}\right)_1 + \mu_{2n+1}\left(\frac{\mu-2n-1}{2}\right)_0$$

Mittelst eines früheren Theoremes über die Binomialcoeffizienten ist es sehr leicht, einen kürzeren Ausdruck für $A_{2n+1}$ anzugeben. Wir haben nämlich nach Formel (16) §. 31:

$$A_{2n+1} = \frac{\mu\,(\mu^2-1^2)\,(\mu^2-3^2)\ldots(\mu^2-\overline{2n-1}^2)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(2n+1)}$$

Bringen wir diefs in der Gleichung (9) für $n = 0, 1, 2, 3$ etc. in Anwendung, so erhalten wir das Theorem:

$$sin\,\mu x = \frac{\mu}{1}sin\,x - \frac{\mu(\mu^2-1^2)}{1\cdot 2\cdot 3}sin^3x + \frac{\mu(\mu^2-1^2)(\mu^2-3^2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}sin^5x - \ldots \qquad (10)$$

und diefs gilt allgemein, wenn $\mu$ eine ungerade Zahl ist, für jedes andere $\mu$ aber nur unter der Bedingung $\frac{\pi}{4} > x > -\frac{\pi}{4}$.

III. Noch ein paar Reihen, welche den vorigen ähnlich gebildet sind, erhält man dadurch, dafs man in (4) und (5) beiderseits mit $cos\,x$ dividirt und dann mit den rechts stehen bleibenden Reihen die nämlichen

Digitized by Google

Transformationen vornimmt, welche wir bisher auf die Reihen (4) und (5) unmittelbar angewendet hatten.

Es ist nämlich

$$\frac{\cos \mu x}{\cos x}$$

$$= \mu_0 \cos^{\mu-1} x - \mu_2 \cos^{\mu-3} x \sin^2 x + \mu_4 \cos^{\mu-5} x \sin^4 x - \dots$$

oder, wenn wieder $\sin x = y$, also $\cos x = \sqrt{1-y^2}$ gesetzt wird,

$$\frac{\cos \mu x}{\cos x}$$

$$= \mu_0 \left(\frac{\mu-1}{2}\right)_0 - \mu_0 \left(\frac{\mu-1}{2}\right)_1 y^2 + \mu_0 \left(\frac{\mu-1}{2}\right)_2 y^4 - \dots$$
$$- \mu_2 \left(\frac{\mu-3}{2}\right)_0 \Big| + \mu_2 \left(\frac{\mu-3}{2}\right)_1 \Big| - \dots$$
$$+ \mu_4 \left(\frac{\mu-5}{2}\right)_0 \Big| - \dots$$

wofür wir

$$\frac{\cos \mu x}{\cos x} = A_0 - A_2 y^2 + A_4 y^4 - \dots \qquad (11)$$

setzen können, wenn

$$A_{2n} = \mu_0 \left(\frac{\mu-1}{2}\right)_n + \mu_2 \left(\frac{\mu-3}{2}\right)_{n-1} + \mu_4 \left(\frac{\mu-5}{2}\right)_{n-2} + \dots$$
$$\dots + \mu_{2n-2} \left(\frac{\mu-2n+1}{2}\right)_1 + \mu_{2n} \left(\frac{\mu-2n-1}{2}\right)_0$$

ist. Nach Formel (17) in §. 31 ist aber

$$A_{2n} = \frac{(\mu^2-1^2)(\mu^2-3^2)\dots(\mu^2-\overline{2n-1}^2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (2n)}$$

Substituirt man diefs in Formel (11), in welcher $A_0 = 1$ ist, und berücksichtigt die Bedeutung von $y$, so findet sich

$$\frac{\cos \mu x}{\cos x} = 1 - \frac{\mu^2-1^2}{1 \cdot 2} \sin^2 x + \frac{(\mu^2-1^2)(\mu^2-3^2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \sin^4 x - \dots \Big] \qquad (12)$$

gültig für jedes $x$, wenn $\mu$ eine ungerade Zahl ist, und aufserdem nur unter der Bedingung $\frac{\pi}{4} > x > -\frac{\pi}{4}$.

IV. Die Gleichung (5) läfst sich auch in folgender Gestalt schreiben:

Digitized by Google

$$\frac{\sin \mu x}{\cos x}$$

$$= \mu_1 \cos^{\mu-2} x \sin x - \mu_3 \cos^{\mu-4} x \sin^3 x + \mu_5 \cos^{\mu-6} x \sin^5 x - \ldots$$

aus welcher man durch Entwickelung der Cosinuspotenzen für $\sin x = y$ Folgendes erhält:

$$\frac{\sin \mu x}{\cos x}$$

$$= \mu_1 \left(\frac{\mu-2}{2}\right)_0 y - \mu_1 \left(\frac{\mu-2}{2}\right)_1 y^3 + \mu_1 \left(\frac{\mu-2}{2}\right)_2 y^5 - \ldots$$
$$- \mu_3 \left(\frac{\mu-4}{2}\right)_0 + \mu_3 \left(\frac{\mu-4}{2}\right)_1 - \ldots$$
$$+ \mu_5 \left(\frac{\mu-6}{2}\right)_0 - \ldots$$

oder

$$\frac{\sin \mu x}{\cos x} = A_1 y - A_3 y^3 + A_5 y^5 - \ldots \qquad (13)$$

wobei

$$A_{2n+1} = \mu_1 \left(\frac{\mu-2}{2}\right)_n + \mu_3 \left(\frac{\mu-4}{2}\right)_{n-1} + \mu_5 \left(\frac{\mu-6}{2}\right)_{n-2} + \ldots$$
$$\ldots + \mu_{2n-1} \left(\frac{\mu-2n}{2}\right)_1 + \mu_{2n+1} \left(\frac{\mu-2n-2}{2}\right)_0$$

Nach Formel (18) §. 35 ist aber

$$A_{2n+1} = \frac{\mu(\mu^2-2^2)(\mu^2-4^2)\ldots(\mu^2-\overline{2n}^2)}{1.2.3\ldots(2n+1)}$$

folglich aus (13) durch Multiplikation mit $\cos x$ und Wiederherstellung des Werthes von $y$

$$\sin \mu x$$
$$= \cos x \left[\frac{\mu}{1} \sin x - \frac{\mu(\mu^2-2^2)}{1.2.3} \sin^3 x + \frac{\mu(\mu^2-2^2)(\mu^2-4^2)}{1.2.3.4.5} \sin^5 x - \ldots\right] \qquad (14)$$

und hier ist die Bedingung der Gültigkeit $\frac{\pi}{4} > x > -\frac{\pi}{4}$, wenn $\mu$ nicht eine ganze gerade Zahl ist, in welchem Falle $x$ ganz willkührlich bleibt.

Wir haben also im Ganzen vier Gleichungen gefunden, welche den Cosinus oder Sinus eines vielfachen Bogens kennen lehren. Von diesen haben die erste und letzte die Eigenschaft mit einander gemein, dafs sie bei geraden $\mu$ für jedes $x$ gelten, und die zweite und dritte sind darin einander ähnlich, dafs für ungerade $\mu$ in ihnen $x$ beliebig bleibt. Stellen wir

Digitized by Google

die Gleichungen nach diesen Eigenschaften zusammen, so haben wir in ihnen folgende Gruppe:

1) Für jedes $x$, wenn $\mu$ gerade ist, aufserdem für $\frac{\pi}{4} > x > -\frac{\pi}{4}$:

$$\left.\begin{array}{l} \cos \mu x \\ = 1 - \frac{\mu^2}{1.2} \sin^2 x + \frac{\mu^2(\mu^2-2^2)}{1.2.3.4} \sin^4 x - \frac{\mu^2(\mu^2-2^2)(\mu^2-4^2)}{1.2.3.4.5.6} \sin^6 x + \ldots \end{array}\right\} (15)$$

$$\left.\begin{array}{l} \sin \mu x \\ = \cos x \left[ \frac{\mu}{1} \sin x - \frac{\mu(\mu^2-2^2)}{1.2.3} \sin^3 x + \frac{\mu(\mu^2-2^2)(\mu^2-4^2)}{1.2.3.4.5} \sin^5 x - \ldots \right] \end{array}\right\} (16)$$

2) Für jedes $x$, wenn $\mu$ ungerade ist, aufserdem für $\frac{\pi}{4} > x > -\frac{\pi}{4}$:

$$\left.\begin{array}{l} \sin \mu x \\ = \frac{\mu}{1} \sin x - \frac{\mu(\mu^2-1^2)}{1.2.3} \sin^3 x + \frac{\mu(\mu^2-1^2)(\mu^2-3^2)}{1.2.3.4.5} \sin^5 x - \ldots \end{array}\right\} (17)$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos \mu x \\ = \cos x \left[ 1 - \frac{\mu^2-1^2}{1.2} \sin^2 x + \frac{(\mu^2-1^2)(\mu^2-3^2)}{1.2.3.4} \sin^4 x - \ldots \right] \end{array}\right\} (18)$$

Von diesen Formeln lassen sich zahlreiche Anwendungen machen, wenn man sie unter verschiedenen Gesichtspunkten betrachtet. Namentlich wollen wir die beiden Fälle näher untersuchen, ob $\mu$ eine ganze Zahl ist, oder nicht, von denen jeder zu neuen und eigenthümlichen Resultaten führt.

## §. 53.

### Spezialisirung der gefundenen vier Hauptformeln.

Ist $\mu$ eine ganze positive Zahl $m$, so gehen die Gleichungen (15), (16), (17), (18) in die folgenden über:

1) Für ein gerades $m$:

$$\left.\begin{array}{l} \cos mx \\ = 1 - \frac{m^2}{1.2} \sin^2 x + \frac{m^2(m^2-2^2)}{1.2.3.4} \sin^4 x - \frac{m^2(m^2-2^2)(m^2-4^2)}{1.2.3.4.5.6} \sin^6 x + \ldots \\ \quad \ldots + (-1)^{\frac{m}{2}} \cdot \frac{m^2(m^2-2^2)\ldots(m^2-\overline{m-2}^2)}{1.2.3\ldots m} \sin^m x \end{array}\right\} (1)$$

$$\left.\begin{array}{l} \sin mx \\ = \cos x \left[ \frac{m}{1} \sin x - \frac{m(m^2-2^2)}{1.2.3} \sin^3 x + \frac{m(m^2-2^2)(m^2-4^2)}{1.2.3.4.5} \sin^5 x - \ldots \right. \\ \left. \quad \ldots + (-1)^{\frac{m}{2}+1} \cdot \frac{m(m^2-2^2)\ldots(m^2-\overline{m-2}^2)}{1.2.3\ldots(m-1)} \sin^{m-1} x \right] \end{array}\right\} (2)$$

Digitized by Google

2) Für ein ungerades $m$:

$$\left.\begin{array}{l} \sin mx \\ = \frac{m}{1}\sin x - \frac{m(m^2-1^2)}{1.2.3}\sin^3 x + \frac{m(m^2-1^2)(m^2-3^2)}{1.2.3.4.5}\sin^5 x - \ldots \\ \ldots + (-1)^{\frac{m-1}{2}} \cdot \frac{m(m^2-1^2)\ldots(m^2-\overline{m-2}^2)}{1.2.3\ldots m}\sin^m x \end{array}\right\} (3)$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos mx \\ = \cos x\left[1 - \frac{m^2-1^2}{1.2}\sin^2 x + \frac{(m^2-1^2)(m^2-3^2)}{1.2.3.4}\sin^4 x - \ldots\right. \\ \left.\ldots + (-1)^{\frac{m-1}{2}} \cdot \frac{(m^2-1^2)(m^2-3^2)\ldots(m^2-\overline{m-2}^2)}{1.2.3\ldots(m-1)}\sin^{m-1} x\right] \end{array}\right\} (4)$$

Man kann hieraus leicht andere Gleichungen ableiten, in welchen die Reihen rechts, statt nach den Potenzen von $\sin x$, nach denen von $\cos x$ fortgehen. Man braucht nämlich blos $\frac{\pi}{2} - x$ an die Stelle von $x$ zu setzen und zu bemerken, dafs $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$, ferner für ein gerades $m$ $\cos m\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\frac{m}{2}\pi \cos mx = (-1)^{\frac{m}{2}} \cos mx$, $\sin m\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\cos\frac{m}{2}\pi \sin mx = (-1)^{\frac{m}{2}+1} \sin mx$, und für ein ungerades $m$ $\sin m\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin m\frac{\pi}{2} \cos mx = (-1)^{\frac{m-1}{2}} \cos mx$, $\cos m\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin m\frac{\pi}{2} \sin mx = (-1)^{\frac{m-1}{2}} \sin mx$ ist. Hiernach ergeben sich folgende Relationen:

1) Für ein gerades $m$:

$$\left.\begin{array}{l} (-1)^{\frac{m}{2}} \cos mx \\ = 1 - \frac{m^2}{1.2}\cos^2 x + \frac{m^2(m^2-2^2)}{1.2.3.4}\cos^4 x - \frac{m^2(m^2-2^2)(m^2-4^2)}{1.2.3.4.5.6}\cos^6 x + \ldots \\ \ldots + (-1)^{\frac{m}{2}} \cdot \frac{m^2(m^2-2^2)\ldots(m^2-\overline{m-2}^2)}{1.2.3\ldots m}\cos^m x \end{array}\right\} (5)$$

Digitized by Google

$$\left.\begin{aligned}&(-1)^{\frac{m}{2}+1}\ sin\ mx\\ =sin\ x&\left[\frac{m}{1}cos\ x-\frac{m(m^2-2^2)}{1.2.3}cos^3x+\frac{m(m^2-2^2)(m^2-4^2)}{1.2.3.4.5}cos^5x-\ldots\right.\\ &\left.\ldots+(-1)^{\frac{m}{2}+1}\cdot\frac{m(m^2-2^2)\ldots(m^2-\overline{m-2}^2)}{1.2.3\ldots(m-1)}cos^{m-1}x\right]\end{aligned}\right\}(6)$$

2) Für ein ungerades $m$:

$$\left.\begin{aligned}&(-1)^{\frac{m-1}{2}}\ cos\ mx\\ =\frac{m}{1}cos\ x&-\frac{m(m^2-1^2)}{1.2.3}cos^3x+\frac{m(m^2-1^2)(m^2-3^2)}{1.2.3.4.5}cos^5x-\ldots\\ &\ldots+(-1)^{\frac{m-1}{2}}\cdot\frac{m(m^2-1^2)\ldots(m^2-\overline{m-2}^2)}{1.2.3\ldots m}cos^mx\end{aligned}\right\}(7)$$

$$\left.\begin{aligned}&(-1)^{\frac{m-1}{2}}\ sin\ mx\\ =sin\ x&\left[1-\frac{m^2-1^2}{1.2}cos^2x+\frac{(m^2-1^2)(m^2-3^2)}{1.2.3.4}cos^4x-\ldots\right.\\ &\left.\ldots+(-1)^{\frac{m-1}{2}}\cdot\frac{(m^2-1^2)(m^2-3^3\ldots(m^2-\overline{m-2}^2)}{1.2.3\ldots(m-1)}cos^{m-1}x\right]\end{aligned}\right\}(8)$$

Diese Gleichungen lassen sich noch so transformiren, dafs je zwei derselben, nämlich (5) und (7), (6) und (8), auf eine gemeinschaftliche Form kommen.

I. Beachtet man, dafs in (5) die linke Seite des Gleichheitszeichens $cos\ mx$ und das letzte Glied der Reihe rechts den gleichen Coeffizienten $(-1)^{\frac{m}{2}}$ haben, so liegt der Gedanke sehr nahe, beiderseits mit diesem Coeffizienten zu multipliziren, wodurch beide Gröfsen positiv werden, und darauf die Reihe rechts in umgekehrter Ordnung zu schreiben. Man hat dann:

$$\begin{aligned}&cos\ mx\\ =\frac{m^2(m^2-2^2)\ldots(m^2-\overline{m-2}^2)}{1.2.3\ldots m}&cos^mx-\frac{m^2(m^2-2^2)\ldots(m^2-\overline{m-4}^2)}{1.2.3\ldots(m-2)}cos^{m-2}x\\ &+\frac{m^2(m^2-2^2)\ldots(m^2-\overline{m-6}^2)}{1.2.3\ldots(m-4)}cos^{m-4}x-\ldots\end{aligned}$$

wobei die Reihe so weit fortgesetzt wird, bis man auf das Glied $\pm 1$ stöfst. Bezeichnet man die Coeffizienten der Reihe mit $A_m$, $A_{m-2}$, $A_{m-4}$ etc., so ist

Digitized by Google

$$\left.\begin{matrix} cos\, mx \\ = A_m \cos^m x - A_{m-2} \cos^{m-2} x + A_{m-4} \cos^{m-4} x - \ldots \end{matrix}\right\} \quad (9)$$

und für jedes ganze positive $p$:

$$A_{m-2p} = \frac{m^2(m^2-2^2)(m^2-4^2)\ldots(m^2-\overline{m-2p-2}^2)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(m-2p)} \quad (10)$$

Man hat aber

$$m^2 = 2\cdot m\cdot\frac{m}{2}$$

$$m^2-2^2 = (m+2)(m-2) = 2^2\left(\frac{m}{2}+1\right)\left(\frac{m}{2}-1\right)$$

$$m^2-4^2 = (m+4)(m-4) = 2^2\left(\frac{m}{2}+2\right)\left(\frac{m}{2}-2\right)$$

. . . . . .

$$m^2-\overline{m-2p-4}^2 = (2m-2p-4)(2p+4) = 2^2(m-p-2)(p+2)$$

$$m^2-\overline{m-2p-2}^2 = (2m-2p-2)(2p+2) = 2^2(m-p-1)(p+1)$$

Durch Substitution dieser Werthe wird

$$\left.\begin{matrix} A_{m-2p} \\ = \dfrac{(m-p-1)(m-p-2)\ldots\left(\frac{m}{2}+1\right)\frac{m}{2}\left(\frac{m}{2}-1\right)\ldots(p+2)(p+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(m-2p)}\, m2^{m-2p-1} \end{matrix}\right\} \quad (11)$$

und hier haben wir im Zähler die Reihenfolge der natürlichen Zahlen von $p+1$ bis $m-p-1$. Setzen wir noch im Zähler und Nenner die Faktorenreihe $1\cdot 2\cdot 3\ldots p$ zu, so entsteht im Zähler die Reihe $1\cdot 2\cdot 3\ldots(m-p-1)$, folglich

$$A_{m-2p} = \frac{(m-p-1)(m-p-2)\ldots 3\cdot 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(m-2p)\cdot 1\cdot 2\cdot 3\ldots p}\, m2^{m-2p-1}$$

In der Faktorenfolge des Zählers kommt aber auch das Produkt $1\cdot 2\cdot 3\ldots(m-2p)$ vor; weil nämlich $m-2p$ im Allgemeinen zwischen 1 und $m-p-1$ liegt, so können wir für $1\cdot 2\cdot 3\ldots(m-p-1)$ schreiben:

$$1\cdot 2\cdot 3\ldots(m-2p)(m-2p+1)(m-2p+2)\ldots(m-p-1)$$

Haben wir jetzt im Zähler und Nenner das Produkt $1\cdot 2\cdot 3\ldots(m-2p)$, so wird

$$A_{m-2p} = \frac{(m-p-1)(m-p-2)\ldots(m-2p+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots p}\, m2^{m-2p-1} \quad (12)$$

Für $p=0$ leidet diese Schlufsweise eine Ausnahme; man findet dann aus (11) unmittelbar

$$A_m = 2^{m-1}.$$

Digitized by Google

Nimmt man jetzt der Reihe nach $p = 0, 1, 2, 3 \ldots$, so hat man die Werthe von $A_m$, $A_{m-2}$, $A_{m-4}$ etc. und folglich nach (9)

$$\cos mx$$
$$= 2^{m-1}\cos^m x - m2^{m-3}\cos^{m-2}x + m2^{m-5}\frac{m-3}{2}\cos^{m-4}x$$
$$- m2^{m-7}\frac{(m-4)(m-5)}{2.3}\cos^{m-6}x + \ldots$$

oder nach beiderseitiger Multiplikation mit 2

$$2\cos mx$$
$$= (2\cos x)^m - m(2\cos x)^{m-2} + \frac{m-3}{2}m(2\cos x)^{m-4}$$
$$- \frac{(m-4)(m-5)}{2.3}m(2\cos x)^{m-6} + \frac{(m-5)(m-6)(m-7)}{2.3.4}m(2\cos x)^{m-8} - \ldots \Bigg\} (13)$$

wobei die Reihe, welche nur für gerade $m$ gilt, so weit fortgesetzt wird, bis man auf das Glied $\pm 2$ kommt.

II. Eine ähnliche Transformation läfst sich mit der Gleichung (7) vornehmen. Schreibt man nämlich die Reihe rechts in umgekehrter Ordnung, nachdem man beiderseits mit $(-1)^{\frac{m-1}{2}}$ multiplizirt hat, so ist für jedes ungerade $m$:

$$\cos mx$$
$$= \frac{m(m^2-1^2)\ldots(m^2-\overline{m-2}^2)}{1.2.3\ldots m}\cos^m x - \frac{m(m^2-1^2)\ldots(m^2-\overline{m-4}^2)}{1.2.3\ldots(m-2)}\cos^{m-2}x$$
$$+ \frac{m(m^2-1^2)\ldots(m^2-\overline{m-6}^2)}{1.2.3\ldots(m-4)}\cos^{m-4}x - \ldots$$

wobei die Reihe rechts so weit fortgesetzt wird, bis man auf das Glied $\pm\frac{m}{1}\cos x$ stöfst. Bezeichnet man die Coeffizienten der Reihe mit $A_m$, $A_{m-2}$, $A_{m-4}$ etc., so ist

$$\cos mx$$
$$= A_m\cos^m x - A_{m-2}\cos^{m-2}x + A_{m-4}\cos^{m-4}x - \ldots \Bigg\} (14)$$

$$A_{m-2p} = \frac{m(m^2-1^2)(m^2-3^2)\ldots(m^2-\overline{m-2p}^2)}{1.2.3\ldots(m-2p)} \quad (15)$$

worin $p$ eine beliebige ganze Zahl bedeutet. Nun hat man aber

Digitized by Google

$$m^2 - 1^2 = 2^2 \left(\frac{m+1}{2}\right)\left(\frac{m-1}{2}\right)$$

$$m^2 - 3^2 = 2^2 \left(\frac{m+3}{2}\right)\left(\frac{m-3}{2}\right)$$

. . . . . .

$$m^2 - \overline{m-2p-4}^2 = 2^2 (m-p-2)\ (p+2)$$

$$m^2 - \overline{m-2p-2}^2 = 2^2 (m-p-1)\ (p+1)$$

Durch diese Substitutionen wird

$$\left.\begin{aligned} & A_{m-2p} \\ = & \frac{(m-p-1)(m-p-2)\ldots\left(\frac{m+1}{2}\right)\left(\frac{m-1}{2}\right)\ldots(p+2)(p+1)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots(m-2p)}\, m 2^{m-2p-1} \end{aligned}\right\} (16)$$

Hier steht im Zähler die Reihe der natürlichen Zahlen von $p+1$ bis $m-p-1$; setzt man noch im Zähler und Nenner die Faktorenfolge $1\,.\,2\,.\,3\ldots p$ zu, so ist

$$A_{m-2p} = \frac{(m-p-1)\,(m-p-2)\ldots 3\,.\,2\,.\,1}{1\,.\,2\,.\,3\ldots(m-2p)\,.\,1\,.\,2\,.\,3\ldots p}\, m 2^{m-2p-1}$$

oder, weil

$$1\,.\,2\,.\,3\ldots(m-p-1)$$
$$= 1\,.\,2\,.\,3\ldots(m-2p)\ (m-2p+1)\ldots(m-p-1)$$

ist,

$$A_{m-2p} = \frac{(m-p-1)\,(m-p-2)\ldots(m-2p+1)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots p}\, m 2^{m-2p-1}$$

Aus (16) findet man nun für $p=0$ den Werth von $A_m$ und aus der vorstehenden Formel für $p=1$, 2, 3 etc. die Werthe von $A_{m-2}$, $A_{m-4}$ etc. Durch Substitution derselben in die Gleichung (14) und beiderseitige Multiplikation mit 2 wird nun

$$\left.\begin{aligned} & 2\cos mx \\ = & (2\cos x)^m - m(2\cos x)^{m-2} + \frac{m-3}{2} m (2\cos x)^{m-4} \\ & - \frac{(m-4)(m-5)}{2\,.\,3} m (2\cos x)^{m-6} + \frac{(m-5)(m-6)(m-7)}{2\,.\,3\,.\,4} m (2\cos x)^{m-8} - \ldots \end{aligned}\right\} (17)$$

und diese Gleichung gilt für jedes ungerade $m$, wenn die Reihe so weit vorgesetzt wird, dafs $\pm 2\cos x$ ihr letztes Glied bildet.

Vergleicht man das gewonnene Resultat mit dem in (13) stehenden, so erkennt man sogleich die Gleichheit der Form und man kann daher beide so zusammenfassen, dafs man sagt:

Digitized by Google

Für jedes beliebige $x$, aber ganze positive $m$ ist

$$\left.\begin{aligned} &2\cos mx \\ &= (2\cos x)^m - m(2\cos x)^{m-2} + \frac{m-3}{2} m (2\cos x)^{m-4} \\ &- \frac{(m-4)(m-5)}{2\cdot 3} m (2\cos x)^{m-6} + \frac{(m-5)(m-6)(m-7)}{2\cdot 3\cdot 4} m (2\cos x)^{m-8} - \ldots \end{aligned}\right\} (18)$$

wobei die Reihe so weit fortgesetzt wird, dafs für ein gerades $m$ die Zahl 2 und für ein ungerades die Gröfse $2m\cos x$ ihr letztes Glied wird, oder, was das Nämliche ist, bis man an die negativen Potenzen von $2\cos x$ kommt, welche man ausschliefst.

III. Die nämlichen Transformationen der Coeffizienten lassen sich fast wörtlich auf die Gleichungen (6) und (8) übertragen, so dafs es hinreichend sein wird, die gemeinsame Form anzuführen, auf welche dieselben reduzirt werden können. Es ist nämlich

$$\left.\begin{aligned} &\sin mx \\ &= \sin x \left[ (2\cos x)^{m-1} - \frac{m-2}{1}(2\cos x)^{m-3} + \frac{(m-3)(m-4)}{1\cdot 2}(2\cos x)^{m-5} \right. \\ &\left. - \frac{(m-4)(m-5)(m-6)}{1\cdot 2\cdot 3}(2\cos x)^{m-7} + \ldots \right] \end{aligned}\right\} (19)$$

wobei die Reihe so weit fortgeführt wird, bis man auf negative Potenzen von $2\cos x$ kommt, welche ausgeschlossen werden.

Mit Hülfe der Binomialcoeffizienten lassen sich übrigens die Gleichungen (18) und (19) auch so schreiben:

$$\left.\begin{aligned} &2\cos mx \\ &= (2\cos x)^m - \frac{m}{1}(2\cos x)^{m-2} + (m-3)_1 \frac{m}{2}(2\cos x)^{m-4} \\ &- (m-4)_2 \frac{m}{3}(2\cos x)^{m-6} + (m-5)_3 \frac{m}{4}(2\cos x)^{m-8} - \ldots \end{aligned}\right\} (20)$$

$$\left.\begin{aligned} &\sin mx \\ &= \sin x \left[ (2\cos x)^{m-1} - (m-2)_1 (2\cos x)^{m-3} + (m-3)_2 (2\cos x)^{m-5} \right. \\ &\left. - (m-4)_3 (2\cos x)^{m-7} + \ldots \right] \end{aligned}\right\} (21)$$

Man kann aus den Gleichungen (1) ... (8), (20) und (21) noch Relationen ableiten, welche algebraischer Natur sind. Dies geschieht durch die Substitution $x = \sqrt{-1}\, lz$, welche nach den Formeln (3) und (4) in §. 46 Folgendes giebt:



Digitized by Google

$$\cos x = \frac{1}{2}(e^{lx} + e^{-lx}) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

$$\sin x = \frac{\sqrt{-1}}{2}(e^{lx} - e^{-lx}) = \frac{\sqrt{-1}}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)$$

ferner

$$\cos mx = \frac{1}{2}\left(x^m + \frac{1}{x^m}\right)$$

$$\sin mx = \frac{\sqrt{-1}}{2}\left(x^m - \frac{1}{x^m}\right)$$

Durch diese Substitutionen erhält man aus den Gleichungen (1), (2), (3) und (4)

$$\left.\begin{aligned} &z^m + \frac{1}{z^m} \\ &= 2\left[1 + \frac{m^2}{2.4}\left(z - \frac{1}{z}\right)^2 + \frac{m^2(m^2-2^2)}{2.4.6.8}\left(z - \frac{1}{z}\right)^4 \right. \\ &\qquad \left. + \frac{m^2(m^2-2^2)(m^2-4^2)}{2.4.6.8.10.12}\left(z - \frac{1}{z}\right)^6 + \cdots\right] \end{aligned}\right\} (22)$$

$$\left.\begin{aligned} &z^m - \frac{1}{z^m} \\ &= \left(z + \frac{1}{z}\right)\left[\frac{m}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right) + \frac{m(m^2-2^2)}{2.4.6}\left(z - \frac{1}{z}\right)^3 \right. \\ &\qquad \left. + \frac{m(m^2-2^2)(m^2-4^2)}{2.4.6.8.10}\left(z - \frac{1}{z}\right)^5 + \cdots\right] \end{aligned}\right\} (23)$$

$$\left.\begin{aligned} &z^m - \frac{1}{z^m} \\ &= 2\left[\frac{m}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right) + \frac{m(m^2-1^2)}{2.4.6}\left(z - \frac{1}{z}\right)^3 \right. \\ &\qquad \left. + \frac{m(m^2-1^2)(m^2-3^2)}{2.4.6.8.10}\left(z - \frac{1}{z}\right)^5 + \cdots\right] \end{aligned}\right\} (24)$$

$$\left.\begin{aligned} &z^m + \frac{1}{z^m} \\ &= \left(z + \frac{1}{z}\right)\left[1 + \frac{m^2-1^2}{2.4}\left(z - \frac{1}{z}\right)^2 \right. \\ &\qquad \left. + \frac{(m^2-1^2)(m^2-3^2)}{2.4.6.8}\left(z - \frac{1}{z}\right)^4 + \cdots\right] \end{aligned}\right\} (25)$$

von welchen Gleichungen das erste Paar blos für gerade, das zweite blos für ungerade $m$ gilt. Ganz analoge Resultate wird man nun auch leicht aus den Formeln (5), (6), (7), (8) und (20), (21) ziehen können.

Digitized by Google

# Capitel XIV.

## Reihen für die cyklometrischen Funktionen.

### §. 54.

Rückblick auf die Formeln des vorletzten Paragraphen.

Wir hatten am Ende des §. 52 vier Gleichungen kennen gelernt, welche für andere, als ganze positive $\mu$ nur unter der Bedingung $\frac{\pi}{4} > x > -\frac{\pi}{4}$ richtig bleiben. Diese Beschränkung war uns durch die Ableitung derselben auferlegt, indem sie blose Transformationen von den Gleichungen (2) und (3) waren, welche wir mittelst des Binomialtheoremes entdeckt hatten. Die Anwendung desselben erforderte $tan\, x$ als ächten Bruch, folglich $\frac{\pi}{4} > x > -\frac{\pi}{4}$ zu nehmen. Da das Binomialtheorem auch für eine der positiven oder negativen Einheit gleiche Veränderliche dann noch gilt, wenn man dem Exponenten blos positive Werthe giebt, so folgt hieraus, dafs die Gleichungen (2) und (3), mithin auch die Gleichungen (15), (16), (17), (18) in §. 52 noch für $tan\, x = \pm 1$, also $x = \pm \frac{\pi}{4}$ richtig bleiben, dafs also die Bedingung der Gültigkeit durch $\frac{\pi}{4} \geqq x \geqq -\frac{\pi}{4}$ ausgedrückt wird. Man kann sich aber leicht durch folgende Betrachtung überzeugen, dafs die letzten vier Formeln auch noch für $\frac{\pi}{2} \geqq x \geqq -\frac{\pi}{2}$ gelten.

Zuerst bemerkt man leicht mit Hülfe der früher gegebenen Regeln zur Bestimmung der Convergenz einer Reihe, dafs die Reihen, welche die jedesmalige rechte Seite in den Gleichungen (15) bis (18) §. 52 ausmachen, von $x = 0$ bis $x = \frac{\pi}{2}$ convergiren. Hierzu kommt noch Eines.

Hätte man in den Gleichungen (2) und (3), oder, was das Nämliche ist, in (4) und (5) $2\mu$ für $\mu$ und $\frac{x}{2}$ für $x$ gesetzt, so würde man die beiden Gleichungen



Digitized by Google

$$\left.\begin{aligned} &\cos \mu x \\ &= (2\mu)_0 \cos^{2\mu} \tfrac{1}{2}x - (2\mu)_2 \cos^{2\mu-2} \tfrac{1}{2}x \sin^2 \tfrac{1}{3}x + \ldots \end{aligned}\right\} (1)$$

$$\left.\begin{aligned} &\sin \mu x \\ &= (2\mu)_1 \cos^{2\mu-1} \tfrac{1}{2}x \sin \tfrac{1}{2}x - (2\mu)_3 \cos^{2\mu-3} \tfrac{1}{2}x \sin^3 \tfrac{1}{2}x + \ldots \end{aligned}\right\} (2)$$

erhalten, welche für andere als ganze $\mu$ unter der Bedingung $\frac{\pi}{4} \geqq \frac{x}{2} \geqq -\frac{\pi}{4}$, d. h. $\frac{\pi}{2} \geqq x \geqq -\frac{\pi}{2}$, richtig sind. Auf diese hätte man ganz die nämlichen Transformationen anwenden können, die wir mit den Gleichungen (4) und (5) vorgenommen haben, und würde dadurch zu vier Relationen gekommen sein, die den unter (15) bis (18) stehenden völlig analog und nur darin von denselben verschieden gewesen sein würden, dafs $2\mu$ an der Stelle von $\mu$ und $\frac{x}{2}$ an der Stelle von $x$ gestanden hätte. Nun ist aber $\sin \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - \cos x)^{\frac{1}{2}}$, folglich $\sin^n \frac{x}{2} = \frac{1}{\sqrt{2^n}}(1 - \cos x)^{\frac{n}{2}}$, und hiernach hätte man alle vorkommenden Potenzen von $\sin \frac{x}{2}$ nach dem Binomialtheorem in Reihen verwandeln können und dadurch jene nach Potenzen von $\sin \frac{x}{2}$ fortgehenden Reihen in andere transformirt, welche nach Potenzen von $\cos x$ fortschreiten, und die nun, wie die früheren, von $x = -\frac{\pi}{2}$ bis $x = +\frac{\pi}{2}$ richtig wären. Man hat aber auch $\cos x = (1 - \sin^2 x)^{\frac{1}{2}}$, folglich $\cos^n x = (1 - \sin^2 x)^{\frac{n}{2}}$, und durch Entwickelung dieser Potenzen in den einzelnen Gliedern würde man jene nach Potenzen von $\cos x$ fortgehenden Reihen wieder in andere nach Potenzen von $\sin x$ fortschreitende verwandeln, hätte also Gleichungen von folgender Form bekommen:

$$\cos \mu x = A_0 - A_2 \sin^2 x + A_4 \sin^4 x - \ldots$$

ebenso für $\sin \mu x$ entsprechend den vier Formeln (15) bis (18) in §. 52. Diese neuen Reihen würden auch convergiren, weil sie blose Transformationen der Gleichungen (1) und (2) wären und weil diese Transformationen mit Anwendung des Binomialtheoremes in den Gleichungen

Digitized by Google

$$\sin^n \frac{x}{2} = \frac{1}{\sqrt{2^n}} (1 - \cos x)^{\frac{n}{2}}$$

$$\cos^n x = (1 - \sin^2 x)^{\frac{n}{2}}$$

geschehen, welches hier richtig bleibt, da die Exponenten positiv sind und die Gröfsen $\cos x$ und $\sin^2 x$ die Einheit nicht übersteigen.

Von welchen Formen aber die Coeffizienten in den neuen von $x = -\frac{\pi}{2}$ bis $x = +\frac{\pi}{2}$ convergirenden Reihen sein würden, ist leicht vorauszusehen. Wir hätten z. B. für $\frac{\pi}{2} \geqq x \geqq -\frac{\pi}{2}$

$$\cos \mu x = A_0 - A_2 \sin^2 x + A_4 \sin^4 x - \ldots$$

und nach Formel (17) §. 52 für $\frac{\pi}{4} \geqq x \geqq -\frac{\pi}{4}$

$$\cos \mu x = 1 - \frac{\mu^2}{1 \cdot 2} \sin^2 x + \frac{\mu^2 (\mu^2 - 2^2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \sin^4 x - \ldots$$

folglich für $\frac{\pi}{4} \geqq x \geqq -\frac{\pi}{4}$

$$A_0 - A_2 \sin^2 x + A_4 \sin^4 x - \ldots$$
$$= 1 - \frac{\mu^2}{1 \cdot 2} \sin^2 x + \frac{\mu^2 (\mu^2 - 2^2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \sin^4 x - \ldots$$

und hieraus folgt, weil beide Reihen für das genannte Intervall convergiren, nach §. 26

$$A_0 = 1, \quad A_2 = \frac{\mu^2}{1 \cdot 2}, \quad A_4 = \frac{\mu^2 (\mu^2 - 2^2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}, \quad \ldots$$

und ebenso würde sich bei den anderen Reihen die Gleichheit der darin vorkommenden Coeffizienten herausstellen.

Wir würden also bei Ausführung der angedeuteten Rechnungsoperationen der Form nach keine neuen Resultate erhalten; aber wir erfahren dadurch, dafs die Gleichungen (15), (16), (17) und (18) in §. 52 von $x = \frac{\pi}{2}$ bis $x = -\frac{\pi}{2}$ richtig bleiben, weil die neuen für diefs Intervall geltenden Resultate von jenen Gleichungen formell nicht verschieden sind.

Wir können demnach die Ungleichung $\frac{\pi}{2} \geqq x \geqq -\frac{\pi}{2}$ als die erweiterte Bedingung für die Gültigkeit der Gleichungen (15), (16), (17) und (18) in §. 52 aufstellen.

Digitized by Google

## §. 55.

### Die cyklometrischen Reihen.

Die Reihen (15) bis (18) in §. 52 sind in ihrer erweiterten Gestalt eine Quelle der merkwürdigsten Relationen. Man gelangt zu diesen dadurch, dafs man das beliebige $\mu$ bis zur Gränze Null abnehmen läfst, nachdem man die Gleichungen selbst ein wenig transformirt hat.

I. Wir ziehen beide Seiten der Gleichung (15) von der Einheit ab und dividiren darauf mit $\mu^2$; es ist dann

$$\left.\begin{aligned}\frac{1-\cos\mu x}{\mu^2} \\ = \frac{\sin^2 x}{2} - \frac{\mu^2-2^2}{2\,.\,3}\cdot\frac{\sin^4 x}{4} + \frac{(\mu^2-2^2)(\mu^2-4^2)}{2\,.\,3\,.\,4\,.\,5}\cdot\frac{\sin^6 x}{6} - \ldots\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Für $1-\cos\mu x$ läfst sich aber $2\sin^2\frac{1}{2}\mu x$ oder $\frac{1}{2}\left(2\sin\frac{1}{2}\mu x\right)^2$ setzen, wodurch die linke Seite unserer Gleichung die Form

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(2\sin\frac{1}{2}\mu x\right)^2}{\mu^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{1}{2}\mu x}{\frac{1}{2}\mu}\right)^2$$

annimmt. Gehen wir jetzt beiderseits in (1) zur Gränze für abnehmende $\mu$ über und bemerken, dafs man links

$$Lim\,\frac{1-\cos\mu x}{\mu^2} = Lim\,\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{1}{2}\mu x}{\frac{1}{2}\mu}\right)^2 = \frac{1}{2}x^2$$

hat, so ergiebt sich jetzt das interessante Resultat:

$$\frac{1}{2}x^2 = \frac{\sin^2 x}{2} + \frac{2}{3}\cdot\frac{\sin^4 x}{4} + \frac{2\,.\,4}{3\,.\,5}\cdot\frac{\sin^6 x}{6} + \ldots \quad (2)$$

gültig von $x = -\frac{\pi}{2}$ bis $x = +\frac{\pi}{2}$.

Die vorstehende Gleichung lehrt uns die Aufgabe lösen: aus einem gegebenen Sinus den zugehörigen Bogen zu finden; sie giebt uns diesen Bogen nicht unmittelbar, sondern sein halbes Quadrat, so dafs also am Ende noch eine Wurzelausziehung nöthig ist. Da die Gleichung selbst nur für das Intervall $x = -\frac{\pi}{2}$ bis $x = +\frac{\pi}{2}$ richtig ist, so giebt sie uns den kleinsten der zu einem gegebenen Sinus gehörenden Bögen; setzen

Digitized by Google

wir also $\sin x = z$, so folgt $x = Arcsin\, z$ und $\frac{1}{2} x^2 = \frac{1}{2} (Arcsin\, z)^2$, wofür wir bequemer $\frac{1}{2} Arc^2 \sin z$ schreiben wollen; mithin ist

$$\frac{1}{2} Arc^2 \sin z = \frac{z^2}{2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{z^4}{4} + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdot \frac{z^6}{6} + \cdots \qquad (3)$$

gültig von $z = -1$ bis $z = +1$.

Nimmt man $z = 1$, so erhält man

$$\frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdot \frac{1}{6} + \cdots \qquad (4)$$

eine Gleichung, die wegen ihrer Form merkwürdig, zur Berechnung von $\pi$ aber nicht brauchbar ist, weil sie zu langsam convergirt.

II. Dividirt man beide Theile der Gleichung (16) in §. 52 mit $\mu$, so ist

$$\frac{\sin \mu x}{\mu}$$

$$= \sin x \cos x \left[ 1 - \frac{\mu^2 - 2^2}{2 \cdot 3} \sin^2 x + \frac{(\mu^2 - 2^2)(\mu^2 - 4^2)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \sin^4 x - \cdots \right]$$

Geht man hier zur Gränze für abnehmende $\mu$ über, so ergiebt sich auf der Stelle für $\frac{\pi}{2} \geqq x \geqq -\frac{\pi}{2}$

$$x = \sin x \cos x \left[ 1 + \frac{2}{3} \sin^2 x + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} \sin^4 x + \cdots \right]$$

Dieses Resultat läfst sich noch in eine andere Form bringen, wenn man die Gleichungen

$$\sin x = \frac{\tan x}{\sqrt{1 + \tan^2 x}}, \quad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 x}}$$

anwendet; es ergiebt sich dann

$$x =$$

$$\frac{\tan x}{1 + \tan^2 x} \left[ 1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{\tan^2 x}{1 + \tan^2 x} + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdot \left( \frac{\tan^2 x}{1 + \tan^2 x} \right)^2 + \cdots \right]$$

oder durch Multiplikation mit $\tan x$

$$x \tan x$$

$$= \frac{\tan^2 x}{1 + \tan^2 x} + \frac{2}{3} \cdot \left( \frac{\tan^2 x}{1 + \tan^2 x} \right)^2 + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} \left( \frac{\tan^2 x}{1 + \tan^2 x} \right)^3 + \cdots \Bigg\} \qquad (5)$$

Diese Gleichung dient für das Intervall $x = -\frac{\pi}{2}$ bis $x = +\frac{\pi}{2}$ zur Lösung der Aufgabe: den kleinsten aller zu einer gegebenen Tangente ge-

Digitized by Google

hörigen Bögen aufzufinden. Für $tan\, x = z$, also $x = Arctan\, z$, hat man noch

$$\frac{z\, Arctan\, z}{} = \frac{z^2}{1+z^2} + \frac{2}{3}\left(\frac{z^2}{1+z^2}\right)^2 + \frac{2.4}{3.5}\left(\frac{z^2}{1+z^2}\right)^3 + \ldots \Bigg\} \quad (6)$$

gültig für $z = -\infty$ bis $z = +\infty$.

Für $z = 1$ erhält man durch Multiplikation mit 2 leicht die Gleichung

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1.2}{3.5} + \frac{1.2.3}{3.5.7} + \ldots \quad (7)$$

in welcher aber die Reihe nicht rasch genug convergirt, um zur Berechnung von $\pi$ benutzt werden zu können.

Verwandelt man nach dem Binomialtheorem die einzelnen in (6) vorkommenden Potenzen

$$(1+z^2)^{-1},\ (1+z^2)^{-2},\ (1+z^2)^{-3} \text{ u. s. f.}$$

in Reihen, was nur für $+1 > z > -1$ geschehen kann, und ordnet Alles nach Potenzen von $z$, so erhält man ein Resultat von der Form

$$z\, Arctan\, z = A_1 z^2 - A_3 z^4 + A_5 z^6 - \ldots$$

oder

$$Arctan\, z = A_1 z - A_3 z^3 + A_5 z^5 - \ldots$$

worin $A_1$, $A_3$, $A_5$ etc. gewisse constante Coeffizienten bedeuten. Die Werthe derselben sind uns aber schon bekannt, weil wir früher schon in Formel (5) §. 51 gefunden hatten

$$Arctan\, z = z - \frac{1}{3}z^3 + \frac{1}{5}z^5 - \ldots \quad (8)$$

$$+1 > z > -1.$$

Man kann zu dieser Reihe auch noch auf anderem Wege gelangen.

Setzt man nämlich in Formel (3) §. 52 für $\mu_1$, $\mu_3$, $\mu_5$ etc. ihre Werthe und dividirt beiderseits mit $\mu$, so ist für $tan\, x < 1$ und auch noch für $tan\, x = 1$, wenn $\mu$ immer positiv bleibt,

$$\frac{sin\, \mu x}{\mu}$$

$$= cos^{\mu} x \left[ tan\, x - \frac{(\mu-1)(\mu-2)}{1.2.3} tan^3 x \right.$$

$$\left. + \frac{(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3)(\mu-4)}{1.2.3.4.5} tan^5 x - \ldots \right]$$

Läfst man hier $\mu$ bis zur Gränze Null abnehmen, so ist

$$Lim\left(\frac{sin\, \mu x}{\mu}\right) = x, \quad Lim\, cos^{\mu} x = 1$$

Digitized by Google

folglich

$$x = \tan x - \frac{1}{3}\tan^3 x + \frac{1}{5}\tan^5 x - \ldots$$
$$+1 \geqq \tan x \geqq -1$$

und diese Reihe ist dieselbe wie die in (8) stehende, was man sogleich erkennt, wenn man $\tan x = z$ setzt, woraus $x = \mathit{Arctan}\, z$ folgt.

Hat man zu einer Tangente $z > 1$ den Bogen zu bestimmen, so kann man mit Hülfe der Gleichung

$$\mathit{Arctan}\, z + \mathit{Arctan}\, \frac{1}{z} = \frac{\pi}{2}$$

die Aufgabe lösen. Es folgt nämlich

$$\mathit{Arctan}\, z = \frac{\pi}{2} - \mathit{Arctan}\, \frac{1}{z}$$

und da der Voraussetzung nach $z > 1$ ist, so ist $\frac{1}{z} < 1$, mithin die Formel (8) anwendbar, wenn man in ihr $\frac{1}{z}$ für $z$ schreibt. Man hat also auch

$$\mathit{Arctan}\, z = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{z^3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{z^5} - \ldots\right) \quad (9)$$
$$z > 1.$$

Da $\mathit{Arccot}\, z + \mathit{Arctan}\, z = \frac{\pi}{2}$ ist, so kann man in jedem Falle $\mathit{Arccot}\, z$ durch die Reihe für $\mathit{Arctan}\, z$ berechnen.

Für $z = 1$ reduziren sich die Gleichungen (8) und (9) auf die schon unter (17) in §. 51 gefundene Gleichung

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots \quad (10)$$

die aber wegen der aufserordentlich langsamen Convergenz der Reihe zur Berechnung von $\pi$ nicht zu brauchen ist.

Man kann die Convergenz der Reihe durch folgende Umformung etwas erhöhen. Es ist offenbar

$$\frac{\pi}{4} = \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{11}\right) + \ldots$$
$$= \frac{2}{1\,.\,3} + \frac{2}{5\,.\,7} + \frac{2}{9\,.\,11} + \ldots$$

und auch

Digitized by Google

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) - \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{9}\right) - \left(\frac{1}{11} - \frac{1}{13}\right) - \cdots$$
$$= 1 - \frac{2}{3.5} - \frac{2}{7.9} - \frac{2}{11.13} - \cdots$$

und durch Division beider Gleichungen mit 2

$$\frac{\pi}{8} = \frac{1}{1.3} + \frac{1}{5.7} + \frac{1}{9.11} + \cdots$$
$$\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3.5} - \frac{1}{7.9} - \frac{1}{11.13} - \cdots$$

und durch Addition

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{5}\right) + \frac{1}{7}\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{9}\right) + \frac{1}{11}\left(\frac{1}{9} - \frac{1}{13}\right) + \cdots$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{4}{3.1.5} + \frac{4}{7.5.9} + \frac{4}{11.9.13} + \cdots$$

oder

$$\frac{\pi}{16} = \frac{1}{8} + \frac{1}{1.3.5} + \frac{1}{5.7.9} + \frac{1}{9.11.13} + \cdots \quad (11)$$

und diese Reihe convergirt bedeutend stärker, als die ursprüngliche (10).

Vortheilhafter für die Berechnung von $\pi$ ist folgender Kunstgriff. Für $xy < 1$ hat man

$$Arctan\, x + Arctan\, y = Arctan\, \frac{x+y}{1-xy}$$

Könnte man nun für $x$ und $y$ zwei ächte Brüche der Art finden, dafs $\frac{x+y}{1-xy} = 1$, also $Arctan\, x + Arctan\, y = Arctan\, 1 = \frac{\pi}{4}$ wäre, so liefsen sich nach Formel (8) $Arctan\, x$ und $Arctan\, y$ in Reihen verwandeln und man erhielte $\frac{\pi}{4}$ als die Summe zweier Reihen. Die angedeutete Idee läfst sich aber leicht ausführen; man braucht nur die unbestimmte Gleichung $\frac{x+y}{1-xy} = 1$ aufzulösen, etwa nach $y$, so erhält man $y = \frac{1-x}{1+x}$ und hier kann man für $x$ jeden beliebigen ächten Bruch setzen; es wird dann $y$ von selbst ein ächter Bruch. Für $x = \frac{1}{2}$ erhält man z. B. $y = \frac{1}{3}$, folglich

$$Arctan\, \frac{1}{2} + Arctan\, \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$$

Digitized by Google

und mithin nach (8)

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2^5} - \cdots$$
$$+ \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^5} - \cdots$$

woraus sich $\pi$ sehr leicht berechnen läfst. Man findet

$$\pi = 3{,}1415926535\ldots$$

III. Aus Formel (17) in §. 52 erhält man durch beiderseitige Division mit $\mu$

$$\frac{\sin \mu x}{\mu}$$
$$= \frac{\sin x}{1} - \frac{\mu^2-1^2}{1\cdot 2}\cdot\frac{\sin^3 x}{3} + \frac{(\mu^2-1^2)(\mu^2-3^2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot\frac{\sin^5 x}{5} - \cdots$$

Läfst man hier $\mu$ bis zur Gränze Null abnehmen, so ergiebt sich für $\frac{\pi}{2} \geqq x \geqq -\frac{\pi}{2}$

$$x = \frac{\sin x}{1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin^3 x}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{\sin^5 x}{5} + \cdots \qquad (12)$$

eine Formel, welche den kleinsten der zu einem gegebenen Sinus gehörenden Bögen finden lehrt. Für $\sin x = z$ wird

$$Arcsin\, z = \frac{z}{1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{z^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{z^5}{5} + \cdots \qquad (13)$$
$$+ 1 \geqq z \geqq -1.$$

Vermöge der Gleichung $Arccos\, z + Arcsin\, z = \frac{\pi}{2}$ kann man hieraus auch $Arccos\, z$ berechnen.

Man findet noch aus (13) für $z = 1$, $z = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $z = \frac{1}{2}$

$$\frac{\pi}{2} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{5} + \cdots$$
$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3\cdot 2} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{5\cdot 2^2} + \cdots\right]$$
$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3\cdot 2^3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{5\cdot 2^5} + \cdots$$

Man könnte endlich das bisherige Verfahren auch auf die Gleichung (18) in §. 52 anwenden. Nach beiderseitiger Division mit $\cos x$ erhielte man durch Übergang zur Gränze für abnehmende $\mu$

$$\frac{1}{\cos x} = 1 + \frac{1}{2}\sin^2 x + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\sin^4 x + \cdots$$

Digitized by Google

Diefs ist aber nichts wesentlich Neues. Verwandelt man nämlich in der Gleichung

$$\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} = (1 - \sin^2 x)^{-\frac{1}{2}}$$

die Potenz $(1 - \sin^2 x)^{-\frac{1}{2}}$ nach dem Binomialtheorem in eine Reihe, so erhält man das Nämliche.

Wir haben nun fast alle uns obliegenden Aufgaben über die goniometrischen und cyklometrischen Funktionen gelöst, da wir sowohl zu einem Bogen die goniometrischen Funktionen, als umgekehrt zu diesen die zugehörigen Bögen zu finden wissen. Es giebt aber noch eine Anzahl anderweitiger Relationen, mit welchen wir uns nun beschäftigen wollen.

---

# Capitel XV.

# Die goniometrischen Funktionen unter der Form von Produkten.

## §. 56.

### Produkte für den Sinus und Cosinus eines vielfachen Bogens.

Wir haben in §. 15 eine Eigenschaft der algebraischen Funktionen kennen gelernt, die so lautet: wenn $z_1, z_2, \ldots z_n$ gewisse $n$ constante Gröfsen bezeichnen, welche die Eigenschaft besitzen, dafs jede derselben für $z$ in die algebraische ganze rationale Funktion

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n \qquad (1)$$

substituirt, diese auf Null reduzirt, also $f(z_1) = f(z_2) = \ldots = 0$ ist, so mufs

$$f(z) = a_n (z - z_1)(z - z_2) \ldots (z - z_n) \qquad (2)$$

sein.

I. Vergleichen wir mit diesem Satze die unter (1) in §. 53 stehende Relation, so übersieht man gleich, dafs hier $\cos mx$ durch ein Produkt ausdrückbar sein müsse; denn die auf der rechten Seite stehende Reihe ist eine algebraische, rationale ganze Funktion von $\sin x$; setzen wir dieses $= z$, so findet der obige Satz sogleich seine Anwendung. Hier ist zunächst für $n = m$

Digitized by Google

$$a_m = (-1)^{\frac{m}{2}} \cdot \frac{m^2(m^2-2^2)(m^2-4^2)\dots(m^2-\overline{m-2}^2)}{1\,.\,2\,.\,2\dots m}$$

Wir haben aber schon aus der Formel (11) für $p=0$ erkannt, dafs

$$a_m = (-1)^{\frac{m}{2}}\, 2^{m-1}$$

ist. Könnten wir noch die speziellen Werthe $z_1, z_2, \dots z_m$ finden, oder, weil $z = \sin x$ ist, $m$ Werthe von $x$ der Art angeben, dafs die Gröfsen $\sin x_1, \sin x_2, \dots \sin x_m$ die rechte Seite der Gleichung (1) auf Null reduzirten, so wäre dann nach (2)

$$\cos mx = (-1)^{\frac{m}{2}}\, 2^{m-1}(\sin x - \sin x_1)(\sin x - \sin x_2)\dots(\sin x - \sin x_m). \quad (3)$$

Um aber diejenigen Werthe von $x$ zu entdecken, für welche sich die rechte Seite der Gleichung (1) in §. 53 annullirt, brauchen wir blos zu fragen, für welche Werthe von $x$ die auf der linken Seite stehende Funktion $= 0$ wird. Diese Werthe sind aber

$$+\frac{\pi}{2m},\ +\frac{3\pi}{2m},\ +\frac{5\pi}{2m},\ \dots,\ +\frac{\overline{m-1}\,\pi}{2m}$$
$$-\frac{\pi}{2m},\ -\frac{3\pi}{2m},\ -\frac{5\pi}{2m},\ \dots,\ -\frac{\overline{m-1}\,\pi}{2m}$$

und die Anzahl der hier angegebenen beträgt auch $m$, wie man leicht bemerken wird. Setzen wir diese Gröfsen der Reihe nach für $x_1, x_2, \dots x_m$, so ist jetzt nach (3)

$$\cos mx = (-1)^{\frac{m}{2}}\, 2^{m-1}\left(\sin x - \sin\frac{\pi}{2m}\right)\left(\sin x - \sin\frac{3\pi}{2m}\right)\dots\left(\sin x - \sin\frac{\overline{m-1}\,\pi}{2m}\right)$$
$$\times\left(\sin x + \sin\frac{\pi}{2m}\right)\left(\sin x + \sin\frac{3\pi}{2m}\right)\dots\left(\sin x + \sin\frac{\overline{m-1}\,\pi}{2m}\right)$$

und dieſs gilt für jedes gerade $m$. Nimmt man immer je zwei über einander stehende Faktoren zusammen, so ist

$$\cos mx = (-1)^{\frac{m}{2}}\, 2^{m-1}\left(\sin^2 x - \sin^2\frac{\pi}{2m}\right)\left(\sin^2 x - \sin^2\frac{3\pi}{2m}\right)\dots\left(\sin^2 x - \sin^2\frac{\overline{m-1}\,\pi}{2m}\right)$$

wo nun die Anzahl der Parenthesen rechts $\frac{m}{2}$ beträgt. Vertheilt man auf diese die $\frac{m}{2}$ negativen Einheiten, so wird jeder der Faktoren negativ und es ist

Digitized by Google

$$\cos mx$$

$$= 2^{m-1}\left(\sin^2\frac{\pi}{2m} - \sin^2 x\right)\left(\sin^2\frac{3\pi}{2m} - \sin^2 x\right)\ldots\left(\sin^2\frac{\overline{m-1}\,\pi}{2m} - \sin^2 x\right)$$

Da dieſs für jedes beliebige $x$ gilt, so können wir auch $x = 0$ setzen, woraus folgt

$$1 = 2^{m-1}\sin^2\frac{\pi}{2m}\sin^2\frac{3\pi}{2m}\ldots\sin^2\frac{\overline{m-1}\,\pi}{2m}$$

eine sehr bemerkenswerthe Relation.

Dividiren wir mit dieser Gleichung in die vorhergehende, so erhalten wir

$$\left.\begin{array}{l}\cos mx \\ = \left(1 - \dfrac{\sin^2 x}{\sin^2\dfrac{\pi}{2m}}\right)\left(1 - \dfrac{\sin^2 x}{\sin^2\dfrac{3\pi}{2m}}\right)\cdots\left(1 - \dfrac{\sin^2 x}{\sin^2\dfrac{\overline{m-1}\,\pi}{2m}}\right)\end{array}\right\}(4)$$

wobei rechts die Anzahl der Faktoren $\frac{m}{2}$ beträgt und $m$ eine gerade Zahl sein muſs.

II. Ähnliche Betrachtungen lassen sich auch auf die Gleichung (2) in §. 53 anwenden. Schreibt man dieselbe in folgender Form:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\sin mx}{\sin x\,\cos x} \\ = \dfrac{m}{1} - \dfrac{m(m^2-2^2)}{1\cdot 2\cdot 3}\sin^2 x + \ldots \\ \qquad \ldots + (-1)^{\frac{m}{2}+1}\cdot\dfrac{m(m^2-2^2)\ldots(m^2-\overline{m-2}^2)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(m-1)}\sin^{m-2}x\end{array}\right\}(5)$$

so hat man rechts eine algebraische, rationale und ganze Funktion von $\sin x$, welche sich, da sie vom Grade $m-2$ ist, in $m-2$ Faktoren des ersten Grades zerlegen lassen muſs, so daſs

$$\frac{\sin mx}{\sin x\,\cos x} = (-1)^{\frac{m}{2}+1}\cdot\frac{m(m^2-2^2)\ldots(m^2-\overline{m-2}^2)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(m-1)}(\sin x - \sin x_1)\ldots(\sin x - \sin x_{m-2})$$

wird.

Hier ist zuerst zu bemerken, daſs

$$\frac{m(m^2-2^2)\ldots(m^2-\overline{m-2}^2)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(m-1)} = 2^{m-1}$$

Digitized by Google

st, wovon man sich leicht überzeugen kann, wenn man die Gröfsen $n^2 - 2^2$, $m^2 - 4^2$, $\ldots$ $m^2 - \overline{m-2}^2$ in Faktoren zerlegt. Ferner st $(-1)^{\frac{m}{2}+1} = (-1)^{\frac{m}{2}-1} = (-1)^{\frac{m-2}{2}}$, folglich

$$\frac{\sin mx}{\sin x \cos x}$$

$$= (-1)^{\frac{m-2}{2}} \cdot 2^{m-1} (\sin x - \sin x_1)(\sin x - \sin x_2) \ldots (\sin x - \sin x_{m-2})$$

Es sind nun noch die Werthe $x_1, x_2, \ldots x_{m-2}$ zu bestimmen, für welche die rechte Seite in (5) sich annullirt, für welche also auch $\sin mx = 0$ sein mufs. Aus der letzten Bemerkung findet man dieselben als die folgenden:

$$+\frac{2\pi}{2m}, +\frac{4\pi}{2m}, +\frac{6\pi}{2m}, \ldots +\frac{\overline{m-2}\,\pi}{2m}$$
$$-\frac{2\pi}{2m}, -\frac{4\pi}{2m}, -\frac{6\pi}{2m}, \ldots -\frac{\overline{m-2}\,\pi}{2m}$$

Mithin ist jetzt

$$\frac{\sin mx}{\sin x \cos x}$$

$$= (-1)^{\frac{m-2}{2}} \cdot 2^{m-1} \left(\sin x - \sin\frac{2\pi}{2m}\right)\left(\sin x - \sin\frac{4\pi}{2m}\right)\ldots\left(\sin x - \sin\frac{\overline{m-2}\,\pi}{2m}\right)$$
$$\times \left(\sin x + \sin\frac{2\pi}{2m}\right)\left(\sin x + \sin\frac{4\pi}{2m}\right)\ldots\left(\sin x + \sin\frac{\overline{m-2}\,\pi}{2m}\right)$$

wobei rechts $m-2$ Faktoren vorhanden sind. Vereinigt man je zwei, so wird

$$\frac{\sin mx}{\sin x \cos x}$$

$$= (-1)^{\frac{m-2}{2}} \cdot 2^{m-1} \left(\sin^2 x - \sin^2\frac{2\pi}{2m}\right)\left(\sin^2 x - \sin^2\frac{4\pi}{2m}\right)\ldots\left(\sin^2 x - \sin^2\frac{\overline{m-2}\,\pi}{2m}\right)$$

wo blos noch $\frac{m-2}{2}$ Faktoren in Parenthesen vorhanden sind. Vertheilt man die in $(-1)^{\frac{m-2}{2}}$ enthaltenen $m-2$ negativen Einheiten auf dieselben, so ist

$$\frac{\sin mx}{\sin x \cos x}$$

$$= 2^{m-1} \left(\sin^2\frac{2\pi}{2m} - \sin^2 x\right)\left(\sin^2\frac{4\pi}{2m} - \sin^2 x\right)\ldots\left(\sin^2\frac{\overline{m-2}\,\pi}{2m} - \sin^2 x\right)$$

Digitized by Google

Läfst man hier $x$ bis zur Gränze Null abnehmen und bemerkt, dafs $Lim\ cos\, x = 1$,

$$Lim \frac{sin\, mx}{sin\, x} = Lim \frac{sin\, mx}{x} \cdot \frac{x}{sin\, x} = m$$

ist, so wird

$$m = 2^{m-1} sin^2 \frac{2\pi}{2m} sin^2 \frac{4\pi}{2m} \cdots sin^2 \frac{\overline{m-2}\,\pi}{2m}$$

Dividirt man mit dieser Gleichung in die vorhergehende, so erhält man

$$\frac{sin\, mx}{m\, sin\, x\, cos\, x} = \left(1 - \frac{sin^2 x}{sin^2 \frac{2\pi}{2m}}\right)\left(1 - \frac{sin^2 x}{sin^2 \frac{4\pi}{2m}}\right) \cdots \left(1 - \frac{sin^2 x}{sin^2 \frac{\overline{m-2}\,\pi}{2m}}\right)$$

oder

$$\frac{sin\, mx}{cos\, x} = m\, sin\, x \left(1 - \frac{sin^2 x}{sin^2 \frac{2\pi}{2m}}\right)\left(1 - \frac{sin^2 x}{sin^2 \frac{4\pi}{2m}}\right) \cdots \left(1 - \frac{sin^2 x}{sin^2 \frac{\overline{m-2}\,\pi}{2m}}\right) \quad (6)$$

eine Gleichung, welche der in (4) stehenden analog ist, nur für gerade $m$ gilt und rechts $\frac{m-2}{2}$ eingeklammerte Faktoren enthält.

III. Dividirt man beide Seiten der Gleichung (3) in §. 53 mit $sin\, x$, wobei rechts eine algebraische Funktion des Grades $m-1$ übrig bleibt, und bemerkt, dafs bei ungeraden $m$ die Funktion $sin\, mx$ sich für die $m-1$ Werthe

$$\pm \frac{2\pi}{2m},\ \pm \frac{4\pi}{2m},\ \pm \frac{6\pi}{2m},\ \cdots \pm \frac{\overline{m-1}\,\pi}{2m}$$

annullirt, so erhält man unter Anwendung des nämlichen Verfahrens leicht die folgende Relation:

$$sin\, mx = m\, sin\, x \left(1 - \frac{sin^2 x}{sin^2 \frac{2\pi}{2m}}\right)\left(1 - \frac{sin^2 x}{sin^2 \frac{4\pi}{2m}}\right) \cdots \left(1 - \frac{sin^2 x}{sin^2 \frac{\overline{m-1}\,\pi}{2m}}\right) \quad (7)$$

welche nur für ungerade $m$ gilt und rechts $\frac{m-1}{2}$ Faktoren des zweiten Grades enthält.

Digitized by Google

Ebenso leicht findet man aus der Gleichung (4) in §. 53 für ungerade $m$:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\cos mx}{\cos x} \\ = &\left(1-\frac{\sin^2 x}{\sin^2\frac{\pi}{2m}}\right)\left(1-\frac{\sin^2 x}{\sin^2\frac{3\pi}{2m}}\right)\cdots\left(1-\frac{\sin^2 x}{\sin^2\frac{m-2}{2m}\pi}\right) \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

wobei rechts $\frac{m-2}{2}$ Faktoren des zweiten Grades stehen.

Nach den vier Formeln (4), (6), (7), (8) ist es also immer möglich, $\sin mx$ und $\cos mx$ für jedes ganze $m$ in Faktoren zu zerlegen. Eine interessante Anwendung dieses Satzes ist die folgende.

## §. 57.

### Unendliche Produkte für den Sinus und Cosinus eines beliebigen Bogens.

Da die Gleichungen (4), (6), (7), (8) des vorigen Paragraphen für jeden Werth des Bogens $x$ gelten, so kann man in ihnen auch $\frac{x}{m}$ an die Stelle von $x$ setzen, wodurch sie folgende Form annehmen:

1) Für ein gerades $m$:

$$\left.\begin{aligned} &\cos x \\ = &\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{m}}{\sin^2\frac{\pi}{2m}}\right)\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{m}}{\sin^2\frac{3\pi}{2m}}\right)\cdots\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{m}}{\sin^2\frac{m-1}{2m}\pi}\right) \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

wobei rechts $\frac{m}{2}$ Faktoren des zweiten Grades stehen;

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\sin x}{\cos\frac{x}{m}} \\ = m\sin\frac{x}{m}&\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{m}}{\sin^2\frac{2\pi}{2m}}\right)\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{m}}{\sin^2\frac{4\pi}{2m}}\right)\cdots\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{m}}{\sin^2\frac{m-2}{2m}\pi}\right) \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

mit $\frac{m-2}{2}$ Faktoren des zweiten Grades;

2) für ein ungerades $m$:



Digitized by Google

$$\frac{\sin x}{\frac{x}{m}} = m \sin\frac{x}{m}\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{m}}{\sin^2\frac{2\pi}{2m}}\right)\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{m}}{\sin^2\frac{4\pi}{2m}}\right)\cdots\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{m}}{\sin^2\frac{m-1\,\pi}{2m}}\right) \quad (3)$$

mit $\frac{m-1}{2}$ Faktoren, und

$$\frac{\cos x}{\cos\frac{x}{m}} = \left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{m}}{\sin^2\frac{\pi}{2m}}\right)\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{m}}{\sin^2\frac{3\pi}{2m}}\right)\cdots\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{m}}{\sin^2\frac{m-2\,\pi}{m}}\right) \quad (4)$$

mit $\frac{m-2}{2}$ Faktoren.

Diese vier Formeln geben $\cos x$ und $\sin x$ mit Hülfe einer ganzen Zahl $m$, die aber beliebig ist und die Anzahl der Faktoren bestimmt.

Da nun die Formeln selbst gelten, wie grofs auch das $m$ sein möge, so können wir dasselbe auch ins Unendliche wachsen lassen, und werden so $\cos x$ und $\sin x$ durch unendliche Produkte darstellen, weil die Anzahl der Faktoren in jedem Falle mit $m$ ins Unendliche wächst. Wir haben nun noch die Gränzen zu bestimmen, welche bei unendlich wachsendem $m$ eintreten.

In der ersten Gleichung ändert sich links nichts, weil dort gar kein $m$ vorkommt. Die Faktoren rechts sind alle von der Form

$$1-\frac{\sin^2\frac{x}{m}}{\sin^2\frac{p\pi}{2m}}$$

wenn wir unter $p$ eine ungerade Zahl verstehen. Wir haben hier also

$$Lim\,\frac{\sin^2\frac{x}{m}}{\sin^2\frac{p\pi}{2m}} = Lim\left(\frac{\sin\frac{x}{m}}{\sin\frac{p\pi}{2m}}\right)^2$$

zu bestimmen. Es ist aber

Digitized by Google

$$\frac{\sin\frac{x}{m}}{\sin\frac{p\pi}{2m}} = \frac{2x}{p\pi} \cdot \frac{\sin\frac{x}{m}}{\frac{x}{m}} \cdot \frac{1}{\frac{\sin\frac{p\pi}{2m}}{\frac{p\pi}{2m}}}$$

folglich, weil für wachsende $m$ $\frac{x}{m}$ und $\frac{p\pi}{2m}$ sich der Null nähern und $Lim\,\frac{\sin\delta}{\delta} = 1$ ist,

$$Lim\,\frac{\sin\frac{x}{m}}{\sin\frac{p\pi}{2m}} = \frac{2x}{p\pi}$$

und

$$Lim\,\frac{\sin^2\frac{x}{m}}{\sin^2\frac{p\pi}{2m}} = \frac{4x^2}{p^2\pi^2}.$$

Wir erhalten also aus (1) unter Anwendung dieses Resultats für $p = 1, 3, 5$ etc.

$$\cos x = \left(1 - \frac{4x^2}{1^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4x^2}{3^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4x^2}{5^2\pi^2}\right)\cdots \quad (5)$$

und hier ist die Anzahl der Faktoren unbegränzt, weil die Anzahl $\frac{m}{2}$ der Faktoren in (1) mit $m$ über alle Gränze hinaus wächst.

Lassen wir ebenso in der Gleichung (2) die beliebige gerade Zahl $m$ ins Unendliche wachsen, so haben wir links $Lim\,\cos\frac{x}{m} = \cos 0 = 1$, und rechts

$$Lim\left(m\sin\frac{x}{m}\right) = Lim\left(x \cdot \frac{\sin\frac{x}{m}}{\frac{x}{m}}\right) = x$$

und für ein gerades $p$ ähnlich wie oben

$$Lim\,\frac{\sin^2\frac{x}{m}}{\sin^2\frac{p\pi}{2m}} = \frac{4x^2}{p^2\pi^2}$$



Digitized by Google

Bringen wir diefs für $p = 2, 4, 6$ etc. in Anwendung, so ergiebt sich aus der Gleichung (2) die folgende:

$$\sin x = x\left(1-\frac{4x^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{4x^2}{4^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{4x^2}{6^2\pi^2}\right)\cdots \quad (6)$$

oder

$$\sin x = x\left(1-\frac{x^2}{1^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{3^2\pi^2}\right)\cdots \quad (7)$$

und hier ist die Anzahl der Faktoren wieder unbegränzt.

Das nämliche Verfahren läfst sich auch auf die Gleichungen (3) und (4) anwenden, liefert aber hier nichts Anderes als die Formeln (6) und (5) selbst wieder. Wir hätten uns sogar die Ableitung von Formel (5) ersparen können, weil dieselbe nur eine Folgerung aus (6) ist. Man hat die Gleichung $2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \sin x$ und hieraus folgt

$$\cos\frac{x}{2} = \frac{2\sin x}{\sin\frac{x}{2}}$$

Setzt man hier für $\sin x$ seinen Werth aus (7) und dann

$$\sin\frac{x}{2} = \frac{x}{2}\left(1-\frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{6^2\pi^2}\right)\cdots \quad (8)$$

was man aus (6) erhält, wenn man $\frac{x}{2}$ für $x$ substituirt, so findet man

$$\cos\frac{x}{2} = \left(1-\frac{x^2}{1^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{3^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{5^2\pi^2}\right)\cdots \quad (9)$$

und diefs ist in der That kein von (5) wesentlich verschiedenes Resultat; man hat nur $2x$ für $x$ zu setzen, um dasselbe mit (5) identisch zu machen.

Will man statt Faktoren des zweiten Grades lieber andere des ersten Grades, so kann man auch schreiben

$$\left.\begin{matrix}\sin x\\ =\end{matrix}\right\} x\left(1-\frac{x}{1\pi}\right)\left(1+\frac{x}{1\pi}\right)\left(1-\frac{x}{2\pi}\right)\left(1+\frac{x}{2\pi}\right)\left(1-\frac{x}{3\pi}\right)\left(1+\frac{x}{3\pi}\right)\cdots \quad (10)$$

$$\left.\begin{matrix}\cos x\\ =\end{matrix}\right\} \left(1-\frac{2x}{1\pi}\right)\left(1+\frac{2x}{1\pi}\right)\left(1-\frac{2x}{3\pi}\right)\left(1+\frac{2x}{3\pi}\right)\left(1-\frac{2x}{5\pi}\right)\left(1+\frac{2x}{5\pi}\right)\cdots \quad (11)$$

oder

Digitized by Google

$$\left.\begin{aligned}&\sin\frac{x}{2}\\ =\frac{x}{2}&\left(1-\frac{x}{2\pi}\right)\left(1+\frac{x}{2\pi}\right)\left(1-\frac{x}{4\pi}\right)\left(1+\frac{x}{4\pi}\right)\left(1-\frac{x}{6\pi}\right)\left(1+\frac{x}{6\pi}\right)\cdots\end{aligned}\right\}(12)$$

$$\left.\begin{aligned}&\cos\frac{x}{2}\\ =&\left(1-\frac{x}{1\pi}\right)\left(1+\frac{x}{1\pi}\right)\left(1-\frac{x}{3\pi}\right)\left(1+\frac{x}{3\pi}\right)\left(1-\frac{x}{5\pi}\right)\left(1+\frac{x}{5\pi}\right)\cdots\end{aligned}\right\}(13)$$

Die Formeln (10) und (12) können zur Auffindung von unendlichen Produkten für die Ludolphische Zahl benutzt werden, wenn man $x$ so nimmt, dafs $\sin x$ oder $\sin\frac{x}{2}$ algebraisch ausgedrückt werden kann. So erhält man z. B. aus (12) für $x=\pi$

$$1=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{6}\cdots$$

mithin

$$\frac{2}{\pi}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{6}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{9}{8}\cdots \qquad (14)$$

und

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdots \qquad (15)$$

Ebenso leicht ergiebt sich aus (12) für $x=\frac{\pi}{2}$

$$\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{12}{11}\cdot\frac{12}{13}\cdot\frac{16}{15}\cdot\frac{16}{17}\cdots \qquad (16)$$

Es mag noch bemerkt werden, dafs es mit Hülfe der Gleichung (5) in §. 24 sehr leicht ist, dergleichen unendliche Produkte in unendlichen Reihen zu verwandeln. Dafs diese convergiren müssen, versteht sich ganz von selbst. So erhält man z. B. aus der Gleichung (14) Folgendes:

$$\frac{2}{\pi}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1.3}{2.2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1.3.3}{2.2.4}-\frac{1}{6}\cdot\frac{1.3.3.5}{2.2.4.4}$$
$$+\frac{1}{6}\cdot\frac{1.3.3.5.5}{2.2.4.4.6}-\frac{1}{8}\cdot\frac{1.3.3.5.5.7}{2.2.4.4.6.6}+\cdots$$
$$=1-\frac{1}{2}+\left(1-\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(1-\frac{5}{6}\right)\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2+\left(1-\frac{7}{8}\right)\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2+\cdots$$

oder

$$\frac{2}{\pi}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{6}\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2+\frac{1}{8}\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2+\cdots$$

Digitized by Google

ebenso aus (15)

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{1} - \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{1} + \frac{1}{3}\cdot\frac{2.2}{1.3} - \frac{1}{5}\cdot\frac{2.2.4}{1.3.3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{2.2.4.4}{1.3.3.5} - \frac{1}{7}\cdot\frac{2.2.4.4.6}{1.3.3.5.5} + \cdots$$

$$= 1 + \left(1-\frac{2}{3}\right) + \left(1-\frac{4}{5}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(1-\frac{6}{7}\right)\left(\frac{2.4}{3.5}\right)^2 + \cdots$$

oder

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{1}{7}\left(\frac{2.4}{3.5}\right)^2 + \frac{1}{9}\left(\frac{2.4.6}{3.5.7}\right)^2 + \cdots$$

Diese Reihen für $\frac{2}{\pi}$ und $\frac{\pi}{2}$ zeigen ganz die nämlichen Gegensätze, wie die Produkte, aus denen sie entstanden sind. Jede Reihe ist das Umgekehrte der anderen, und diefs spricht sich auch in der Bildung ihrer einzelnen Glieder aus.

Da man aus Sinus und Cosinus alle übrigen goniometrischen Funktionen ableiten kann, so lassen sich dieselben nun auch mit Hülfe von (10) und (11) in unendliche Produkte verwandeln.

---

## Capitel XVI.

## Verschiedene Relationen für goniometrische Funktionen.

### §. 58.

#### Die Bernoulli'schen Zahlen.

Dividirt man beide Seiten der Gleichung (7) im vorigen Paragraphen mit $x$ und nimmt dann beiderseits die natürlichen Logarithmen, welche unter der Voraussetzung $x < \pi$ sämmtlich reell ausfallen, so wird

$$l\left(\frac{\sin x}{x}\right)$$

$$= l\left(1 - \frac{x^2}{1^2\pi^2}\right) + l\left(1 - \frac{x^2}{2^2\pi^2}\right) + l\left(1 - \frac{x^2}{3^2\pi^2}\right) + \cdots$$

Verwandelt man hier alle Logarithmen nach der Formel

$$l(1 - z^2) = -z^2 - \frac{1}{2}z^4 - \frac{1}{3}z^6 - \ldots$$

$$1 > z$$

Digitized by Google

in Reihen, indem man $x < \pi$ nimmt und $z$ successive $\frac{x}{1\pi}$, $\frac{x}{2\pi}$, $\frac{x}{3\pi}$ etc. setzt, so ergiebt sich

$$l\left(\frac{\sin x}{x}\right)$$
$$= -\frac{x^2}{1^2\pi^2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^4}{1^4\pi^4} - \frac{1}{3}\cdot\frac{x^6}{1^6\pi^6} - \cdots$$
$$-\frac{x^2}{2^2\pi^2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^4}{2^4\pi^4} - \frac{1}{3}\cdot\frac{x^6}{2^6\pi^6} - \cdots$$
$$-\frac{x^2}{3^2\pi^2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^4}{3^4\pi^4} - \frac{1}{3}\cdot\frac{x^6}{3^6\pi^6} - \cdots$$
$$- \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

oder, wenn man diese Reihen in vertikaler Richtung zusammennimmt,

$$l\left(\frac{\sin x}{x}\right)$$
$$= -\frac{x^2}{\pi^2}\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots\right)$$
$$-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^4}{\pi^4}\left(\frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \cdots\right)$$
$$-\frac{1}{3}\cdot\frac{x^6}{\pi^6}\left(\frac{1}{1^6} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \cdots\right)$$
$$- \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

Bezeichnen wir die Summen der eingeklammerten convergenten Reihen mit $S_2$, $S_4$, $S_6$, ..., so dafs überhaupt für ein positives ganzes $n$

$$S_{2n} = \frac{1}{1^{2n}} + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \cdots \qquad (1)$$

ist, so haben wir für $x < \pi$

$$\left.\begin{array}{l} l\left(\frac{\sin x}{x}\right) \\ = -\frac{x^2}{\pi^2}S_2 - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^4}{\pi^4}S_4 - \frac{1}{3}\cdot\frac{x^6}{\pi^6}S_6 - \cdots \end{array}\right\} \qquad (2)$$

Man kann aber $l\left(\frac{\sin x}{x}\right)$ auch noch auf andere Weise in eine convergente Reihe verwandeln. Es ist nämlich

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{2.3}\left(1 - \frac{x^2}{4.5} + \frac{x^4}{4.5.6.7} - \cdots\right)$$

und zugleich für $x < \pi$ $\frac{\sin x}{x} < 1$ und positiv, folglich

Digitized by Google

$$\frac{x^2}{2.3}\left(1-\frac{x^2}{4.5}+\frac{x^4}{4.5.6.7}-\ldots\right)<1$$

mithin

$$l\left(\frac{\sin x}{x}\right)$$
$$=l\left[1-\frac{x^2}{2.3}\left(1-\frac{x^2}{4.5}+\frac{x^4}{4.5.6.7}-\ldots\right)\right]$$

und durch Verwandlung in eine Reihe

$$l\left(\frac{\sin x}{x}\right)$$
$$=-\frac{x^2}{2.3}\left(1-\frac{x^2}{4.5}+\frac{x^4}{4.5.6.7}-\ldots\right)$$
$$-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x^2}{2.3}\right)^2\left(1-\frac{x^2}{4.5}+\frac{x^4}{4.5.6.7}-\ldots\right)^2$$
$$-\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{x^2}{2.3}\right)^3\left(1-\frac{x^2}{4.5}+\frac{x^4}{4.5.6.7}-\ldots\right)^3$$
$$-\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Führt man die angedeuteten Erhebungen auf Potenzen wirklich aus und ordnet Alles nach Potenzen von $x$, so findet man

$$l\left(\frac{\sin x}{x}\right)$$
$$=-\frac{2x^2}{1.2}\cdot\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\cdot\frac{2^3x^4}{1.2.3.4}\cdot\frac{1}{30}-\frac{1}{3}\cdot\frac{2^5x^6}{1.2.3.4.5.6}\cdot\frac{1}{42}-\ldots$$

Hier kommen gewisse rationale Brüche

$$\frac{1}{6},\ \frac{1}{30},\ \frac{1}{42},\ \ldots$$

in den Coeffizienten vor, deren Gesetz man nicht sogleich übersieht. Man nennt diese Zahlen, deren Bildungsgesetz wir später einsehen werden, die Bernoulli'schen Zahlen und bezeichnet sie mit $B_1, B_3, B_5, \ldots$*), so dafs

$$l\left(\frac{\sin x}{x}\right)$$
$$=-\frac{2B_1x}{1.2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{2^3B_3x^4}{1.2.3.4}-\frac{1}{3}\cdot\frac{2^5B_5x^6}{1.2.3.4.5.6}-\ldots \quad (3)$$

ist. Vergleichen wir in (2) und (3) die Coeffizienten gleicher Potenzen von $x$, so finden wir

*) Manche bezeichnen sie mit $B_1, B_2, B_3$ etc. Die obige Weise ist aber wegen der ähnlichen Sekantencoeffizienten vorzuziehen.

Digitized by Google

$$\frac{1}{\pi^2}S_2 = \frac{2B_1}{1.2},\ \frac{1}{\pi^4}S_4 = \frac{2^3 B_3}{1.2.3.4},\ \frac{1}{\pi^6}S_6 = \frac{2^5 B_5}{1.2.3.4.5.6},\ \ldots$$

folglich

$$S_2 = \frac{2B_1}{1.2}\pi^2,\ S_4 = \frac{2^3 B_3}{1.2.3.4}\pi^4,\ S_6 = \frac{2^5 B_5}{1.2.3.4.5.6}\pi^6,\ \ldots$$

überhaupt

$$S_{2n} = \frac{2^{2n-1} B_{2n-1} \pi^{2n}}{1.2.3\ldots(2n)}$$

d. i. nach Formel (1)

$$\frac{1}{1^{2n}} + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \ldots = \frac{2^{2n-1} B_{2n-1} \pi^{2n}}{1.2.3\ldots(2n)}. \qquad (4)$$

Diese Gleichung zeigt einerseits, dafs die Summe der reziproken geraden Potenzen aller natürlichen Zahlen gleich ist einer Potenz von der Ludolphischen Zahl, multiplizirt mit einem gewissen rationalen Bruche; andererseits könnte man sie zur Berechnung der Bernoulli'schen Zahl brauchen. Diefs Letztere wäre jedoch sehr unbequem; wir werden später eine leichtere Methode kennen lernen.

Dividirt man beiderseits in (4) mit $2^{2n}$, so kommt:

$$\frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{4^{2n}} + \frac{1}{6^{2n}} + \ldots = \frac{B_{2n-1} \pi^{2n}}{2.1.2.3\ldots(2n)}, \qquad (5)$$

zieht man diefs von (4) ab, so findet sich leicht

$$\frac{1}{1^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{5^{2n}} + \ldots = \frac{(2^{2n}-1) B_{2n-1} \pi^{2n}}{2.1.2.3\ldots(2n)}, \qquad (6)$$

wodurch auch die Summen der reziproken geraden Potenzen der successiven ungeraden Zahlen gefunden werden können; z. B für $n = 1$, weil $B_1 = \frac{1}{6}$,

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{8}.$$

## §. 59.

### Einführung imaginärer Binome in die unendlichen Produkte für den Sinus und Cosinus.

Die Gleichungen (5) und (7) des §. 57 können als blose Transformationen der Formeln

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \ldots$$

$$\sin x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \ldots$$

Digitized by Google

angesehen werden. In der That würde man auch durch wirkliche Ausführung der dort angedeuteten Multiplikationen bei Anwendung des numerischen Werthes von $\pi$ finden:

$$\cos x = 1 - 0{,}5 \,.\, x^2 + 0{,}041666 \ldots x^4 - \ldots$$
$$\sin x = x - 0{,}1666 \ldots x^3 + 0{,}00833 \ldots x^5 - \ldots$$

was von dem Obigen nicht verschieden ist.

Die vorstehenden Formeln gelten aber auch für ein imaginäres $x = vi$, wenn man

$$\cos vi = \frac{e^v + e^{-v}}{2}, \quad \sin vi = \frac{e^v - e^{-v}}{2}\, i$$

nimmt. Es müssen folglich auch die Gleichungen (5) und (7) in §. 57 für $x = vi$ richtig bleiben. Man erhält dann

$$\frac{e^v + e^{-v}}{2} = \left(1 + \frac{4v^2}{1^2\pi^2}\right)\left(1 + \frac{4v^2}{3^2\pi^2}\right)\left(1 + \frac{4v^2}{5^2\pi^2}\right)\cdots \quad (1)$$

$$\frac{e^v - e^{-v}}{2} = v\left(1 + \frac{v^2}{1^2\pi^2}\right)\left(1 + \frac{v^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1 + \frac{v^2}{3^2\pi^2}\right)\cdots \quad (2)$$

Diese Formeln könnten zur Berechnung von $e^v$ dienen. Nachdem nämlich für ein gegebenes $v$ der Werth des jedesmaligen Produktes rechts berechnet worden ist, steht rechts eine bekannte Gröfse $k$; für $e^v = z$ ist dann $e^{-v} = \frac{1}{z}$, und folglich wäre dann noch die quadratische Gleichung $\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) = k$ oder $\frac{1}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right) = k$ aufzulösen.

Der ausgesprochene Gedanke von der Einführung imaginärer Gröfsen läfst sich aber noch in gröfserer Allgemeinheit ausführen und zwar auf folgende Weise:

I. Aus der Gleichung (10) in §. 57 folgt, wenn man beiderseits die natürlichen Logarithmen nimmt:

$$l \sin x = lx + l\left(\frac{1\pi - x}{1\pi}\right) + l\left(\frac{1\pi + x}{1\pi}\right) + l\left(\frac{2\pi - x}{2\pi}\right) + l\left(\frac{2\pi + x}{2\pi}\right) + l\left(\frac{3\pi - x}{3\pi}\right) + l\left(\frac{3\pi + x}{3\pi}\right) + \cdots$$

und wenn man $x = u + vi$ nimmt:

Digitized by Google

$$l\sin(u+vi) \tag{3}$$
$$= l(u+vi) + l\left(\frac{1\pi-u}{1\pi} - \frac{vi}{1\pi}\right) + l\left(\frac{1\pi+u}{1\pi} + \frac{vi}{1\pi}\right)$$
$$+ l\left(\frac{2\pi-u}{2\pi} - \frac{vi}{2\pi}\right) + l\left(\frac{2\pi+u}{2\pi} + \frac{vi}{2\pi}\right)$$
$$+ l\left(\frac{3\pi-u}{3\pi} - \frac{vi}{3\pi}\right) + l\left(\frac{3\pi+u}{3\pi} + \frac{vi}{3\pi}\right)$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Nun hat man erstlich nach Formel (8) §. 46

$$\left.\begin{array}{l} l\sin(u+vi) \\ = \frac{1}{2}\,l\left(\frac{e^{2v}+e^{-2v}}{4} - \frac{\cos 2u}{2}\right) + i\,Arctan\left(\frac{e^{v}-e^{-v}}{e^{v}+e^{-v}}\cot u\right) \end{array}\right\} \tag{4}$$

ferner nach Formel (5) §. 45

$$l(u+vi) = \frac{1}{2}\,l(u^2+v^2) + i\,Arctan\frac{v}{u} \tag{5}$$

Zwei auf einander folgende Glieder in (3) sind von der Form

$$l\left(\frac{n\pi-u}{n\pi} - \frac{vi}{n\pi}\right),\quad l\left(\frac{n\pi+u}{n\pi} + \frac{vi}{n\pi}\right)$$

worin $n$ eine ganze positive Zahl bedeutet.

Nimmt man in Formel (6) §. 45 $\alpha = \frac{n\pi-u}{n\pi}$, $\beta = \frac{v}{n\pi}$ und in (5) ebendaselbst $\alpha = \frac{n\pi+u}{n\pi}$, $\beta = \frac{v}{n\pi}$, so erhält man

$$\left.\begin{array}{l} l\left(\frac{n\pi-u}{n\pi} - \frac{vi}{n\pi}\right) \\ = \frac{1}{2}\,l\left(\frac{\overline{n\pi-u}^2+v^2}{n^2\pi^2}\right) - i\,Arctan\frac{v}{n\pi-u} \end{array}\right\} \tag{6}$$

$$\left.\begin{array}{l} l\left(\frac{n\pi+u}{n\pi} + \frac{vi}{n\pi}\right) \\ = \frac{1}{2}\,l\left(\frac{\overline{n\pi+u}^2+v^2}{n^2\pi^2}\right) + i\,Arctan\frac{v}{n\pi+u} \end{array}\right\} \tag{7}$$

Führt man diese Gleichungen (4), (5), (6), (7), die beiden letzten für $n = 1, 2, 3, \ldots$ in (3) ein, so wird

Digitized by Google

$$\frac{1}{2}l\left(\frac{e^{2v}+e^{-2v}}{4}-\frac{\cos 2u}{2}\right)+i\,Arctan\left(\frac{e^{v}-e^{-v}}{e^{v}+e^{-v}}\cot u\right)$$

$$=\frac{1}{2}l(u^2+v^2)+i\,Arctan\frac{v}{u}$$

$$+\frac{1}{2}l\left(\frac{(1\pi-u)^2+v^2}{1^2\pi^2}\right)-i\,Arctan\frac{v}{1\pi-u}$$

$$+\frac{1}{2}l\left(\frac{(2\pi+u)^2+v^2}{1^2\pi^2}\right)+i\,Arctan\frac{v}{1\pi+u}$$

$$+\frac{1}{2}l\left(\frac{(2\pi-u)^2+v^2}{2^2\pi^2}\right)-i\,Arctan\frac{v}{2\pi-u}$$

$$+\frac{1}{2}l\left(\frac{(2\pi+u)^2+v^2}{2^2\pi^2}\right)+i\,Arctan\frac{v}{2\pi+u}$$

$$+\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .$$

Vergleicht man hier die reellen und imaginären Theile auf beiden Seiten und bemerkt für den ersten, dafs aus einer Gleichung wie

$$\frac{1}{2}lA=\frac{1}{2}la+\frac{1}{2}lb+\frac{1}{2}lc+\ldots$$

immer folgt

$$A=abcd\ldots$$

so ergeben sich folgende Relationen:

$$\frac{e^{2v}+e^{-2v}}{4}-\frac{\cos 2u}{2} \qquad (8)$$

$$=(u^2+v^2)\left(\frac{(1\pi-u)^2+v^2}{1^2\pi^2}\right)\left(\frac{(1\pi+u)^2+v^2}{1^2\pi^2}\right)\left(\frac{(2\pi-u)^2+v^2}{2^2\pi^2}\right)\left(\frac{(2\pi+u)^2+v^2}{2^2\pi^2}\right)\ldots$$

und

$$Arctan\left(\frac{e^{v}-e^{-v}}{e^{v}+e^{-v}}\cot u\right) \qquad (9)$$

$$=Arctan\frac{v}{u}-Arctan\frac{v}{1\pi-u}+Arctan\frac{v}{1\pi+u}$$

$$-Arctan\frac{v}{2\pi-u}+Arctan\frac{v}{2\pi+u}$$

$$-\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .$$

II. Eine ganz ähnliche Transformation ist auf die Gleichung (11) §. 57 anwendbar. Nachdem man beiderseits den natürlichen Logarithmus genommen hat, setzt man $x=u+vi$. Nach den in §. 46 entwickelten Lehren findet man links:

Digitized by Google

$$l\cos(u+vi)$$
$$= \frac{1}{2}\,l\left(\frac{e^{2v}+e^{-2v}}{4}+\frac{\cos 2u}{2}\right) - i\,Arctan\left(\frac{e^{v}-e^{-v}}{e^{v}+e^{-v}}\tan u\right)$$

Alle Reihenglieder rechts sind von den Formen

$$l\left(\frac{n\pi-2u}{n\pi}-\frac{2vi}{n\pi}\right),\quad l\left(\frac{n\pi+2u}{n\pi}+\frac{2vi}{n\pi}\right)$$

worin $n$ eine ungerade Zahl bedeutet.

Nach (6) und (7) hat man $2u$ und $2v$ für $u$ und $v$ gesetzt,

$$l\left(\frac{n\pi-2u}{n\pi}-\frac{2vi}{n\pi}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\,l\left(\frac{(n\pi-2u)^2+4v^2}{n^2\pi^2}\right) - i\,Arctan\frac{2v}{n\pi-2u}$$

und

$$l\left(\frac{n\pi+2u}{n\pi}+\frac{2vi}{n\pi}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\,l\left(\frac{(n\pi+2u)^2+4v^2}{n^2\pi^2}\right) + i\,Arctan\frac{2v}{n\pi+2u}$$

Substituirt man diese Werthe für $n=1,\ 3,\ 5,\ \ldots$ und vergleicht dann die reellen und imaginären Theile beiderseits, so erhält man folgende Relationen:

$$\frac{e^{2v}+e^{-2v}}{4}+\frac{\cos 2u}{2} \qquad (10)$$
$$=\left(\frac{(1\pi-2u)^2+4v^2}{1^2\pi^2}\right)\left(\frac{(1\pi+2u)^2+4v^2}{1^2\pi^2}\right)\left(\frac{(3\pi-2u)^2+4v^2}{3^2\pi^2}\right)\left(\frac{(3\pi+2u)^2+4v^2}{3^2\pi^2}\right)\cdots$$

$$Arctan\left(\frac{e^{v}-e^{-v}}{e^{v}+e^{-v}}\tan u\right) \qquad (11)$$
$$= Arctan\frac{2v}{1\pi-2u} - Arctan\frac{2v}{1\pi+2u} + Arctan\frac{2v}{3\pi-2u}$$
$$- Arctan\frac{2v}{3\pi+2u}+\cdots$$

welche die Analoga zu (8) und (9) sind.

Nimmt man in (8) und (10) $v=0$, so kommt man auf die Gleichungen (6) und (5) §. 57 für $x=u$ zurück; für $u=0$ dagegen findet man die Formeln (1) und (2) unseres Paragraphen wieder. Bemerkenswerth ist der Fall $u=v$. In (8) sind zwei auf einander folgende Faktoren

$$\left(\frac{(n\pi-u)^2+v^2}{n^2\pi^2}\right)\left(\frac{(n\pi+u)^2+v^2}{n^2\pi^2}\right)$$

Digitized by Google

für $v = u$ wird daraus

$$\left(\frac{n^2\pi^2 + 2u^2 - 2un\pi}{n^2\pi^2}\right)\left(\frac{n^2\pi^2 + 2u^2 + 2un\pi}{n^2\pi^2}\right)$$
$$= \frac{(n^2\pi^2 + 2u^2)^2 - (2un\pi)^2}{n^4\pi^4} = 1 + \frac{2^2u^4}{n^4\pi^4}$$

folglich hat man aus (8) für $v = u$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{e^{2u} + e^{-2u}}{4} - \frac{\cos 2u}{2}\\ &= 2u^2\left(1 + \frac{2^2u^4}{1^4\pi^4}\right)\left(1 + \frac{2^2u^4}{2^4\pi^4}\right)\left(1 + \frac{2^2u^4}{3^4\pi^4}\right)\ldots\end{aligned}\right\} \quad (12)$$

Ebenso leicht erhält man aus (10) für $v = u$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{e^{2u} + e^{-2u}}{4} + \frac{\cos 2u}{2}\\ &= \left(1 + \frac{2^4u^4}{1^4\pi^4}\right)\left(1 + \frac{2^4u^4}{3^4\pi^4}\right)\left(1 + \frac{2^4u^4}{5^4\pi^4}\right)\ldots\ldots\end{aligned}\right\} \quad (13)$$

Auch von den Gleichungen (9) und (11) läfst sich eine interessante Anwendung machen, mit der wir uns etwas ausführlicher beschäftigen wollen.

## §. 60.

### Die Reihen für die Tangente, Cotangente und Cosekante.

Zwei ebenso einfache als elegante und brauchbare Relationen ergeben sich aus (9) und (11) dadurch, dafs man beiderseits mit $v$ dividirt und dann zur Gränze für abnehmende $v$ übergeht, wobei man den Satz $Lim\ \frac{Arctan\ \delta}{\delta} = 1$ *) mehrmals anzuwenden Gelegenheit hat. Nach geschehener Division mit $v$ läfst sich die linke Seite von (9) in folgender Form darstellen:

$$\frac{Arctan\left(\frac{e^v - e^{-v}}{e^v + e^{-v}}\cot u\right)}{\frac{e^v - e^{-v}}{e^v + e^{-v}}\cot u} \cdot \frac{e^v - e^{-v}}{v} \cdot \frac{\cot u}{e^v + e^{-v}}.$$

Hier ist nun für abnehmende $v$ $Lim\,(e^v - e^{-v}) = 0$, $Lim\,(e^v + e^{-v}) = 2$. Setzen wir der Kürze wegen

*) Derselbe ergiebt sich aus der Gleichung $Lim\ \frac{x}{\tan x} = 1$, wenn man $\tan x = \delta$ setzt und jetzt $x$ und $\delta$ gleichzeitig bis zur Gränze Null abnehmen läfst.

Digitized by Google

$$\frac{e^v - e^{-v}}{v} \cot u = \delta$$

so ist $\delta$ eine Gröfse, welche mit $v$ gleichzeitig bis zur Gränze Null abnimmt. Für den ersten Faktor haben wir also $Lim \frac{Arctan\, \delta}{\delta} = 1$. Wir haben nun noch

$$Lim \frac{e^v - e^{-v}}{v} \text{ und } Lim \frac{\cot u}{e^v + e^{-v}}$$

zu bestimmen. Es ist aber durch Verwandlung von $e^v$ und $e^{-v}$ in Reihen

$$\frac{e^v - e^{-v}}{v} = 2\left[1 + \frac{v^2}{1.2.3} + \frac{v^4}{1.2.3.4.5} + \cdots\right]$$

folglich

$$Lim \frac{e^v - e^{-v}}{v} = 2$$

Ferner haben wir

$$Lim \frac{\cot u}{e^v + e^{-v}} = \frac{\cot u}{2}$$

Führen wir alle diese Werthe ein, so ist

$$\left.\begin{aligned} Lim \frac{1}{v} Arctan \left(\frac{e^v - e^{-v}}{e^v + e^{-v}} \cot u\right) \\ = 1.2. \frac{\cot u}{2} = \cot u \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

und dieſs bleibt auf der linken Seite in Formel (9) stehen.

Alle Glieder auf der rechten Seite haben nach geschehener Division mit $v$ die Form:

$$\frac{1}{v} Arctan \frac{v}{n\pi \mp u} = \frac{Arctan \frac{v}{n\pi \mp u}}{\frac{v}{n\pi \mp u}} \cdot \frac{1}{n\pi \mp u}$$

worin $n$ eine ganze positive Zahl bedeutet.

Setzen wir $\frac{v}{n\pi \mp u} = \delta$, so ist $\delta$ eine mit $v$ gleichzeitig bis zur Gränze Null abnehmende Gröfse; folglich wird

$$Lim \frac{1}{v} Arctan \frac{v}{n\pi \mp u} = Lim \frac{Arctan\, \delta}{\delta} \cdot \frac{1}{n\pi \mp u}$$

$$= \frac{1}{n\pi \mp u}.$$

Führen wir dieses Resultat für $n = 0, 1, 2, \ldots$ und das in (1) erhal-

Digitized by Google

tene in die beiderseits durch $v$ getheilte Gleichung (9) des vorigen Paragraphen ein, so ergiebt sich

$$\cot u = \frac{1}{u} - \frac{1}{\pi - u} + \frac{1}{\pi + u} - \frac{1}{2\pi - u} + \frac{1}{2\pi + u} - \cdots \quad (2)$$

oder wenn man je zwei Glieder zusammennimmt:

$$\left.\begin{aligned} &\cot u \\ = &\frac{1}{u} - \frac{2u}{\pi^2 - u^2} - \frac{2u}{(2\pi)^2 - u^2} - \frac{2u}{(3\pi)^2 - u^2} - \cdots \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Dividirt man auch in der Gleichung (11) §. 59 beiderseits mit $v$ und geht dann zur Gränze für abnehmende $v$ über, so findet man ebenso leicht

$$Lim \frac{1}{v} Arctan\left(\frac{e^v - e^{-v}}{e^v + e^{-v}} \tan u\right) = \tan u$$

und für ein ungerades $n$

$$Lim \frac{1}{v} Arctan \frac{2v}{n\pi \mp 2u} = \frac{2}{n\pi \mp 2u} = \frac{1}{\frac{n\pi}{2} \mp u}$$

woraus dann folgt

$$\tan u = \frac{1}{\frac{\pi}{2} - u} - \frac{1}{\frac{\pi}{2} + u} + \frac{1}{\frac{3\pi}{2} - u} - \frac{1}{\frac{3\pi}{2} + u} + \cdots \quad (4)$$

oder

$$\left.\begin{aligned} &\tan u \\ = &\frac{2u}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - u^2} + \frac{2u}{\left(\frac{3\pi}{2}\right)^2 - u^2} + \frac{2u}{\left(\frac{5\pi}{2}\right)^2 - u^2} + \cdots \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Man kann diese beiden Gleichungen auch leicht in folgende Formen bringen:

$$\tan \frac{u}{2} = \frac{2}{\pi - u} - \frac{2}{\pi + u} + \frac{2}{3\pi - u} - \frac{2}{3\pi + u} + \cdots \quad (6)$$

und

$$\left.\begin{aligned} &\tan \frac{u}{2} \\ = &\frac{4u}{\pi^2 - u^2} + \frac{4u}{(3\pi)^2 - u^2} + \frac{4u}{(5\pi)^2 - u^2} + \cdots \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Addirt man endlich die Gleichungen (2) und (6), (3) und (7), unter der Bemerkung, dafs

Digitized by Google

$$\cot u + \tan\frac{u}{2} = \frac{\cos u}{\sin u} + \frac{1-\cos u}{\sin u}$$

$$= \frac{1}{\sin u} = \operatorname{cosec} u$$

ist, so erhält man noch:

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{cosec} u \\ &= \frac{1}{u} + \frac{1}{\pi-u} - \frac{1}{\pi+u} - \frac{1}{2\pi-u} + \frac{1}{2\pi+u} + \cdots \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

worin das Vorzeichen rechts von Paar zu Paar wechselt, und

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{cosec} u \\ &= \frac{1}{u} + \frac{2u}{\pi^2-u^2} - \frac{2u}{(2\pi)^2-u^2} + \frac{2u}{(3\pi)^2-u^2} - \cdots \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Aus diesen für jedes $u$ geltenden Ausdrücken lassen sich auch unter gewissen Beschränkungen andere ableiten, welche die Cotangente, Tangente und Cosekante in Form solcher Reihen darstellen, welche nach Potenzen der veränderlichen Gröfse $u$ fortschreiten.

Bezeichnet nämlich $a$ eine constante Gröfse, so ist immer

$$\frac{u}{a^2-u^2} = \frac{u}{a^2} \cdot \frac{1}{1-\frac{u^2}{a^2}}$$

und hier läfst sich für

$$1 > \frac{u}{a} > -1$$

oder

$$a > u > -a$$

der Quotient $\dfrac{1}{1-\dfrac{u^2}{a^2}}$ in eine Reihe verwandeln (§. 19) und giebt

$$\frac{u}{a^2-u^2} = \frac{u}{a^2}\left[1 + \frac{u^2}{a^2} + \frac{u^4}{a^4} + \frac{u^6}{a^6} + \cdots\right]$$

$$= \frac{1}{a}\left[\frac{u}{a} + \frac{u^3}{a^3} + \frac{u^5}{a^5} + \frac{u^7}{a^7} + \cdots\right]$$

Diese Transformation kann man mit jedem Gliede der Reihen (3), (5), (9) vornehmen. Für die erste müssen die Bedingungen

$$\pi > u > -\pi, \quad 2\pi > u > -2\pi \text{ etc.}$$

erfüllt sein, welche sich auf die erste reduziren. Wir haben also für $\pi > u > -\pi$



Digitized by Google

$$\begin{aligned} &cot\, u \\ &= \frac{1}{u} - \frac{2}{\pi}\left[\frac{u}{\pi} + \frac{u^3}{\pi^3} + \frac{u^5}{\pi^5} + \frac{u^7}{\pi^7} + \cdots\right] \\ &\quad - \frac{2}{2\pi}\left[\frac{u}{2\pi} + \left(\frac{u}{2\pi}\right)^3 + \left(\frac{u}{2\pi}\right)^5 + \cdots\right] \\ &\quad - \frac{2}{3\pi}\left[\frac{u}{3\pi} + \left(\frac{u}{3\pi}\right)^3 + \left(\frac{u}{3\pi}\right)^5 + \cdots\right] \\ &\quad - \cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Lösen wir die einzelnen Parenthesen auf und nehmen darauf alle Glieder in vertikaler Richtung zusammen, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} &cot\, u \\ &= \frac{1}{u} - \frac{2u}{\pi^2}\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots\right) \\ &\quad - \frac{2u^3}{\pi^4}\left(\frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \cdots\right) \\ &\quad - \frac{2u^5}{\pi^6}\left(\frac{1}{1^6} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \cdots\right) \\ &\quad - \cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

oder, wenn wir die Summen der eingeklammerten Reihen nach Formel (4) §. 58 für $n = 1, 2, 3, \ldots$ bestimmen,

$$\left.\begin{aligned} &cot\, u \\ &= \frac{1}{u} - \frac{2^2 B_1}{1.2}u - \frac{2^4 B_3}{1.2.3.4}u^3 - \frac{2^6 B_5}{1.2.3.4.5.6}u^5 - \cdots \\ &\qquad \pi > u > -\pi \end{aligned}\right\} (10)$$

oder auch, wenn man $u = \frac{1}{2}x$ setzt und mit 2 beiderseits dividirt:

$$\left.\begin{aligned} &\tfrac{1}{2}\, cot\, \tfrac{1}{2}x \\ &= \frac{1}{x} - \frac{B_1 x}{1.2} - \frac{B_3 x^3}{1.2.3.4} - \frac{B_5 x^5}{1.2.3.4.5.6} - \cdots \\ &\qquad 2\pi > x > -2\pi \end{aligned}\right\} (11)$$

Eine ganz ähnliche Transformation läfst sich mit der Gleichung (5) vornehmen, wenn $u$ den Bedingungen

$$\frac{\pi}{2} > u > -\frac{\pi}{2},\quad \frac{3\pi}{2} > u > -\frac{3\pi}{2},\quad \ldots$$

unterworfen ist. Diese Bedingungen reduziren sich auf die erste, weil durch deren Erfüllung die übrigen gleich mit erfüllt sind. Verwandelt man nun für $\frac{\pi}{2} > u > -\frac{\pi}{2}$ jedes einzelne Glied von (5) in eine Reihe und

Digitized by Google

nimmt dann ähnlich wie vorher alle diese Reihen in vertikaler Richtung zusammen, so findet man leicht:

$$\begin{aligned} tan\, u = &\frac{2^3 u}{\pi^2}\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots\right)\\ &+\frac{2^5 u^3}{\pi^4}\left(\frac{1}{1^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\cdots\right)\\ &+\frac{2^7 u^5}{\pi^6}\left(\frac{1}{1^6}+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{5^6}+\cdots\right)\\ &+\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\end{aligned}$$

Durch Anwendung der Gleichung (6) in §. 58 für $n = 1, 2, 3, \ldots$ ergiebt sich hieraus:

$$\left.\begin{aligned} &tan\, u\\ =&\frac{2^2(2^2-1)}{1.2}B_1 u+\frac{2^4(2^4-1)}{1.2.3.4}B_3 u^3+\frac{2^6(2^6-1)}{1.2.3.4.5.6}B_5 u^5+\cdots\\ &\frac{\pi}{2}>u>-\frac{\pi}{2}\end{aligned}\right\}(12)$$

Man könnte endlich eine ähnliche Transformation auch auf die Gleichung (9) anwenden. Man gelangt aber kürzer zu dem Resultate, was man finden würde, wenn man in (12) $\frac{u}{2}$ für $u$ setzt und dann (10) hierzu addirt. Es ergiebt sich

$$\left.\begin{aligned} &cosec\, u=\frac{1}{u}\\ &+\frac{2(2-1)}{1.2}B_1 u+\frac{2(2^3-1)}{1.2.3.4}B_3 u^3+\frac{2(2^5-1)}{1.2.3.4.5.6}B_5 u^5+\cdots\\ &\pi>u>\pi\end{aligned}\right\}(13)$$

Man kann aus diesen Formeln leicht andere nicht auf goniometrische Funktionen Bezug habende ableiten, wenn man bemerkt, dafs die Gleichung (10) den Quotienten darstellt, welchen man durch Division mit der Sinusreihe in die Cosinusreihe erhalten mufs, dafs ebenso die Gleichung (12) als Resultat der umgekehrten Division mit der Cosinus- in die Sinusreihe und (13) die reziproke Sinusreihe darstellt. Dafs diese Gleichungen nicht für jeden Werth der veränderlichen Gröfse $u$ gelten, wie diefs bei den Reihen für *cos u* und *sin u* der Fall ist, darf gar nicht befremden. Bei jeder Division solcher Reihen bleibt nämlich ein Rest; will man nun die Division ins Unendliche fortsetzen, so mufs man untersuchen, unter welchen Bedingungen dieser Rest sich der Null nähert. Diese Untersuchung würde auf dem gewöhnlichen Wege bei der Division der Reihen



Digitized by Google

für *sin u* und *cos u* ihre besonderen Schwierigkeiten haben, dagegen h uns der Gang, den wir genommen haben, sehr befriedigend zum Ziel geführt. Es würde sogar sehr leicht sein, den Rest zu bestimmen, de noch zur Reihe hinzuzufügen wäre, wenn man dieselbe irgendwo bei ei nem $n$ten Gliede abbräche. Zu dem Zwecke brauchte man nur die in (5 vorkommenden Brüche

$$\frac{2u}{\pi^2 - u^2}, \quad \frac{2u}{(2\pi)^2 - u^2}, \quad \frac{2u}{(3\pi)^2 - u^2}, \quad \cdots$$

in endliche Reihen, von gleicher Gliederzahl ($= n$), zu verwandeln und den jedesmaligen Rest hinzuzufügen. Die Summe aller dieser einzelnen Reste gäbe dann den Rest der Reihe für *cot u;* für $u < \pi$ nähert sich derselbe bei wachsenden $n$ der Null, aufserdem in keinem Falle. Obgleich nun die genannten Reihen nicht für jeden Werth von $u$ gelten, so kann man sie doch für imaginäre Werthe brauchen, wenn man hier den Modulus der imaginären Gröfse den Bedingungen unterwirft, welche für $u$ statt finden müssen. Diese Substitution ist uns defswegen erlaubt, weil die Reihen, deren Quotienten unsere Gleichungen darstellen, auch für imaginäre $u$ Bedeutung haben.

Setzt man nun in (10), (12) und (13) $u = vi$, und bemerkt, dafs

$$cot\, vi = \frac{e^v + e^{-v}}{e^v - e^{-v}} \cdot \frac{1}{i}$$

$$tan\, vi = \frac{e^v - e^{-v}}{e^v + e^{-v}}\, i$$

$$cosec\, vi = \frac{2}{e^v - e^{-v}} \cdot \frac{1}{i}$$

ist, so erhält man leicht:

$$\left.\begin{array}{c} \frac{e^v + e^{-v}}{e^v - e^{-v}} \\ \pi > v > -\pi \end{array}\right\} = \frac{1}{v} + \frac{2^2 B_1}{1.2}\, v - \frac{2^4 B_3}{1.2.3.4}\, v^3 + \frac{2^6 B_5}{1.2.3.4.5.6}\, v^5 - \ldots \quad (14)$$

$$\left.\begin{array}{c} \frac{e^v - e^{-v}}{e^v + e^{-v}} \\ \frac{\pi}{2} > v > -\frac{\pi}{2} \end{array}\right\} = \frac{2^2(2^2-1)}{1.2} B_1 v - \frac{2^4(2^4-1)}{1.2.3.4} B_3 v^3 + \frac{2^6(2^6-1)}{1.2.3.4.5.6} B_5 v^5 - \ldots \quad (15)$$

Digitized by Google

$$= \frac{1}{v} - \frac{2(2-1)}{1.2} B_1 v + \frac{2(2^3-1)}{1.2.3.4} B_3 v^3 - \frac{2(2^5-1)}{1.2.3.4.5.6} B_5 v^5 + \ldots \Bigg\} \quad (16)$$

$$\frac{2}{e^v - e^{-v}}$$

$$\pi > v > -\pi$$

Man kann diese Gleichungen auch dadurch erhalten, dafs man in den für jedes $u$ geltenden (3), (5), (9) $u = vi$ setzt und die einzelnen Brüche

$$\frac{2v}{\pi^2 + v^2}, \quad \frac{2v}{(2\pi)^2 + v^2}, \quad \ldots$$

in Reihen verwandelt.

## §. 61.

### Die Sekantencoeffizienten und die Sekantenreihe.

Zur Vollständigkeit unserer Betrachtungen fehlt uns noch eine Reihe für die Sekante. Man gelangt zu derselben auf folgendem Wege:

I. Setzt man in den Gleichungen (9) und (11) $u = \frac{\pi}{4}$, so reduziren sie sich gemeinschaftlich auf die folgende:

$$\left.\begin{aligned} &Arctan\left(\frac{e^v - e^{-v}}{e^v + e^{-v}}\right) \\ &= Arctan\frac{4v}{\pi} - Arctan\frac{4}{3}\frac{v}{\pi} + Arctan\frac{4}{5}\frac{v}{\pi} - \ldots \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Hier kann man unter der Voraussetzung $\frac{4v}{\pi} < 1$ oder $v < \frac{\pi}{4}$, woraus von selbst folgt $\frac{4v}{3\pi} < 1$, $\frac{4v}{5\pi} < 1$ u. s. f., jeden einzelnen Bogen nach Formel (8) §. 55 in eine Reihe verwandeln; es wird hierdurch

$$\begin{aligned} &Arctan\left(\frac{e^v - e^{-v}}{e^v + e^{-v}}\right) \\ &= \frac{4v}{\pi} - \frac{1}{3}\left(\frac{4v}{\pi}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{4v}{\pi}\right)^5 - \frac{1}{7}\left(\frac{4v}{\pi}\right)^7 + \ldots \\ &- \frac{4v}{3\pi} + \frac{1}{3}\left(\frac{4v}{3\pi}\right)^3 - \frac{1}{5}\left(\frac{4v}{3\pi}\right)^5 + \frac{1}{7}\left(\frac{4v}{3\pi}\right)^7 + \ldots \\ &+ \frac{4v}{5\pi} - \frac{1}{3}\left(\frac{4v}{5\pi}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{4v}{5\pi}\right)^5 - \frac{1}{7}\left(\frac{4v}{5\pi}\right)^7 + \ldots \\ &- \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \end{aligned}$$

oder, wenn man die Glieder in vertikaler Richtung zusammennimmt:

Digitized by Google

$$\begin{aligned} &\mathit{Arctan}\left(\frac{e^v - e^{-v}}{e^v + e^{-v}}\right) \qquad (2)\\ &= \frac{4v}{\pi}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots\right)\\ &\quad - \frac{1}{3}\left(\frac{4v}{\pi}\right)^3 \left(\frac{1}{1^3} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \cdots\right)\\ &\quad + \frac{1}{5}\left(\frac{4v}{\pi}\right)^5 \left(\frac{1}{1^5} - \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^5} - \frac{1}{7^5} + \cdots\right)\\ &\quad - \cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Setzt man dagegen für $\frac{e^v - e^{-v}}{e^v + e^{-v}}$ seinen Werth aus der Gleichung (15) im vorigen Paragraphen, worin

$$B_1 = \frac{1}{6},\quad B_3 = \frac{1}{30},\quad B_5 = \frac{1}{42},\quad \ldots$$

ist, so erhält man für $\frac{\pi}{4} > v$

$$\begin{aligned} &\mathit{Arctan}\left(\frac{e^v - e^{-v}}{e^v + e^{-v}}\right)\\ &= \quad v - \frac{1}{3}v^3 + \frac{2}{15}v^5 - \cdots\\ &\quad - \frac{1}{3}\left(v - \frac{1}{3}v^3 + \frac{2}{15}v^5 - \cdots\right)^3\\ &\quad + \frac{1}{5}\left(v - \frac{1}{3}v^3 + \frac{2}{15}v^5 - \cdots\right)^5\\ &\quad - \cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Führt man die angedeuteten Potenzirungen aus und ordnet Alles nach Potenzen von $v$, so läfst sich das Resultat in folgende Form bringen:

$$\frac{v}{1} - \frac{1}{3}\cdot\frac{2^2 . v^3}{1.2} + \frac{1}{5}\cdot\frac{2^4 . 5 . v^5}{1.2.3.4} - \frac{1}{7}\cdot\frac{2^6 . 61 . v^7}{1.2.3.4.5.6} + \cdots$$

oder, wenn wir diejenigen Faktoren in den Zählern, deren Gesetz man nicht absieht, nämlich

$$1,\ 1,\ 5,\ 61,\ \ldots$$

mit $B_0, B_2, B_4, B_6, \ldots$ bezeichnet,

$$\begin{aligned} &\mathit{Arctan}\left(\frac{e^v - e^{-v}}{e^v + e^{-v}}\right)\\ &= \frac{1}{1}B_0 v - \frac{1}{3}\cdot\frac{2^2 B_2}{1.2}v^3 + \frac{1}{5}\cdot\frac{2^4 B_4}{1.2.3.4}v^5 - \cdots \end{aligned}$$

Digitized by Google

Vergleicht man dieses Resultat mit (2), so ergeben sich aus der Identifizirung gleicher Potenzen von $v$ folgende Relationen:

$$\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots=\frac{B_0\pi}{2^2}$$

$$\frac{1}{1^3}-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{7^3}+\cdots=\frac{B_2\pi^3}{1.2.2^4}$$

$$\frac{1}{1^5}-\frac{1}{3^5}+\frac{1}{5^5}-\frac{1}{7^5}+\cdots=\frac{B_4\pi^5}{1.2.3.4.2^6}$$

. . . . . .

und überhaupt für eine ganze Zahl $n$

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{1^{2n+1}}-\frac{1}{3^{2n+1}}+\frac{1}{5^{2n+1}}-\frac{1}{7^{2n+1}}+\cdots\\ =\frac{B_{2n}\pi^{2n+1}}{1.2.3\ldots(2n).2^{2n+2}}\end{aligned}\right\}\quad(3)$$

Mittelst dieser Relation ist es nun sehr leicht, die Sekante in eine Reihe zu verwandeln.

II. Setzt man in der Gleichung (8) $\frac{\pi}{2}-u$ an die Stelle von $u$, so kommt:

$$sec\ u$$
$$=\frac{1}{\frac{\pi}{2}-u}+\frac{1}{\frac{\pi}{2}+u}-\frac{1}{\frac{3\pi}{2}-u}-\frac{1}{\frac{3\pi}{2}+u}+\frac{1}{\frac{5\pi}{2}-u}+\frac{1}{\frac{5\pi}{2}+u}-\cdots$$

und durch Vereinigung von je zwei Gliedern

$$sec\ u$$
$$\left.=\frac{\pi}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2-u^2}-\frac{3\pi}{\left(\frac{3\pi}{2}\right)^2-u^2}+\frac{5\pi}{\left(\frac{5\pi}{2}\right)^2-u^2}-\cdots\right\}(4)$$

Ein allgemeines Glied dieser Reihe ist für ein ungerades $m$ von der Form

$$\frac{m\pi}{\left(\frac{m\pi}{2}\right)^2-u^2}=\frac{2^2}{m\pi}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{2u}{m\pi}\right)^2}$$

und wenn man für $2u<m\pi$ dieſs in eine Reihe verwandelt, so wird

$$\frac{m\pi}{\left(\frac{m\pi}{2}\right)^2-u^2}$$
$$=\frac{2^2}{m\pi}\left[1+\left(\frac{2u}{m\pi}\right)^2+\left(\frac{2u}{m\pi}\right)^4+\left(\frac{2u}{m\pi}\right)^6+\cdots\right]$$

Digitized by Google

Nehmen wir diese Verwandlung mit jedem Gliede der Reihe (4) vor, wozu die Bedingungen

$$2u < 1\pi, \quad 2u < 3\pi, \quad 2u < 5\pi, \quad \ldots$$

d. h.

$$\frac{\pi}{2} > u > -\frac{\pi}{2}$$

gehören, so entsteht Folgendes:

$$\begin{aligned} \sec u = {} & \frac{2^2}{\pi}\left[1 + \left(\frac{2u}{\pi}\right)^2 + \left(\frac{2u}{\pi}\right)^4 + \left(\frac{2u}{\pi}\right)^6 + \cdots\right] \\ & - \frac{2^2}{3\pi}\left[1 + \left(\frac{2u}{3\pi}\right)^2 + \left(\frac{2u}{3\pi}\right)^4 + \left(\frac{2u}{3\pi}\right)^6 + \cdots\right] \\ & + \frac{2^2}{5\pi}\left[1 + \left(\frac{2u}{5\pi}\right)^2 + \left(\frac{2u}{5\pi}\right)^4 + \left(\frac{2u}{5\pi}\right)^6 + \cdots\right] \\ & - \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \end{aligned}$$

oder bei vertikaler Summirung:

$$\begin{aligned} \sec u = {} & \frac{2^2}{\pi}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots\right) \\ & + \frac{2^4 u^2}{\pi^3}\left(\frac{1}{1^3} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \cdots\right) \\ & + \frac{2^6 u^4}{\pi^5}\left(\frac{1}{1^5} - \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^5} - \frac{1}{7^5} + \cdots\right) \\ & + \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \end{aligned}$$

Bringen wir hier die unter I. gefundenen Resultate in Anwendung, so ergiebt sich sehr einfach für $B_0 = 1$

$$\left.\begin{aligned} \sec u = {} & 1 + \frac{B_2 u^2}{1.2} + \frac{B_4 u^4}{1.2.3.4} + \frac{B_6 u^6}{1.2.3.4.5.6} + \cdots \\ & \frac{\pi}{2} > u > -\frac{\pi}{2} \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Dieser Mitwirkung bei der Sekantenreihe haben die Zahlen $B_2$, $B_4$, $B_6$, ... den Namen der Sekantencoeffizienten zu verdanken.

Man kann aus der vorstehenden merkwürdigen Reihe noch eine andere durch die Substitution $u = vi$ ableiten. Dieselbe ist:

$$\left.\begin{aligned} \frac{2}{e^v + e^{-v}} = {} & 1 - \frac{B_2 v^2}{1.2} + \frac{B_4 v^4}{1.2.3.4} - \frac{B_6 v^6}{1.2.3.4.5.6} + \cdots \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Digitized by Google

## §. 62.

### Rekursionsskale für die Bernoulli'schen Zahlen und Sekantencoeffizienten.

Die Methoden, welche wir in §. 58 und §. 61 zur Bestimmung der Bernoulli'schen Zahlen $B_1$, $B_3$, $B_5$ etc. und der Sekantencoeffizienten angewendet haben, leiden an der übelen Eigenschaft, sehr langweilige Rechnungen nöthig zu machen, ohne das Gesetz, nach welchem jene Zahlen sich bilden, erkennen zu lassen. Wir wollen uns daher nach vortheilhafteren Berechnungsmethoden umsehen und namentlich versuchen, ob sich nicht Formeln entdecken lassen, mit deren Hülfe man jede nächstfolgende Zahl aus allen vorhergehenden Zahlen dieser Art ableiten könnte. Hierzu bietet sich nun folgender sehr einfache Gedanke dar:

Die Reihen, in welchen die Bernoulli'schen Zahlen vorkommen, stellen die Cotangente, Tangente und Cosekante dar; diese Funktionen sind aber aus Sinus und Cosinus zusammengesetzt; wollte man unmittelbar für die letzteren Funktionen die gleichgeltenden Reihen setzen, so würde man zu Divisionen mit Reihen genöthigt sein, wenn man daraus jene Relationen ableiten wollte; dagegen kann man aber die Probe der Multiplikation anwenden, die sich mit Reihen leichter ausführen läfst; z. B. ist nach (10) §. 60

$$\frac{\cos u}{\sin u} = \frac{1}{u} - \frac{2^2 B_1}{1.2}u - \frac{2^4 B_3}{1.2.3.4}u^3 - \ldots$$

folglich mufs

$$\cos u = \sin u \left[\frac{1}{u} - \frac{2^2 B_1}{1.2}u - \frac{2^4 B_3}{1.2.3.4}u^3 - \ldots\right]$$

sein. Setzt man hier für $\cos u$ und $\sin u$ ihre Werthe, so erhält man rechts das Produkt zweier Reihen. Dieses läfst sich aber nach den in §. 26 entwickelten Lehren ausführen und nach Potenzen von $u$ ordnen. Vergleicht man hierauf die Coeffizienten gleicher Potenzen von $u$ auf beiden Seiten, so erhält man Relationen für die Bernoulli'schen Zahlen. Ganz ähnlich kann man mit den übrigen Gleichungen (11), (12) und (13) in §. 60 verfahren. Am elegantesten gestaltet sich die Ausführung dieses Gedankens für die Gleichung (11), wenn man beiderseits nicht mit $\sin \frac{1}{2}x$, sondern mit $\sin x$ multiplizirt. Man erhält dann links

Digitized by Google

$$\frac{\cos\frac{1}{2}x \,.\, \sin x}{2\sin\frac{1}{2}x} = \frac{\cos\frac{1}{2}x \,.\, 2\sin\frac{1}{2}x\cos\frac{1}{2}x}{2\sin\frac{1}{2}x} = \cos^2\frac{1}{2}x$$

$$= \frac{1+\cos x}{2}.$$

Bezeichnen wir für den Augenblick 1.2 mit (2), 1.2.3 mit (3), 1.2.3.4 mit (4) u. s. f., so ist

$$\frac{1}{2}\cot\frac{1}{2}x = \frac{1}{x} - \frac{B_1 x}{(2)} - \frac{B_2 x^3}{(4)} - \frac{B_3 x^5}{(6)} - \cdots$$

$$\sin x = \frac{x}{(1)} - \frac{x^3}{(3)} + \frac{x^5}{(5)} - \frac{x^7}{(7)} + \cdots$$

Multiplizirt man nun beide Gleichungen mit einander und beachtet das oben gefundene Resultat

$$\frac{1}{2}\cot\frac{1}{2}x \,.\, \sin x = \frac{1+\cos x}{2}$$

so erhält man:

$$\frac{1+\cos x}{2}$$

$$= 1 - \frac{1}{(1)}\cdot\frac{B_1}{(2)}x^2 - \frac{1}{(1)}\cdot\frac{B_2}{(4)}x^4 - \frac{1}{(1)}\cdot\frac{B_3}{(6)}x^6 - \cdots$$
$$- \frac{1}{(3)} + \frac{1}{(3)}\cdot\frac{B_1}{(2)} + \frac{1}{(3)}\cdot\frac{B_2}{(4)} + \cdots$$
$$+ \frac{1}{(5)} - \frac{1}{(5)}\cdot\frac{B_1}{(2)} - \cdots$$
$$- \frac{1}{(7)} + \cdots$$

Der Coeffizient von $x^{2n}$ ist demnach

$$\left.\begin{aligned} &-\frac{1}{(1)}\cdot\frac{B_{2n-1}}{(2n)} + \frac{1}{(3)}\cdot\frac{B_{2n-3}}{(2n-2)} - \frac{1}{(5)}\cdot\frac{B_{2n-5}}{(2n-4)} + \cdots \\ &\cdots + (-1)^n\frac{1}{(2n+1)} \end{aligned}\right\} (1)$$

Auf der linken Seite ist aber

$$\frac{1+\cos x}{2}$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{(2)} + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^4}{(4)} - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^6}{(6)} + \cdots$$

folglich hier der Coeffizient von $x^{2n}$

Digitized by Google

$$(-1)^n \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(2n)}$$

Vergleicht man diefs mit dem unter (1) gefundenen Coeffizienten, so folgt durch beiderseitige Multiplikation mit $(-1)$

$$\frac{1}{(1)} \cdot \frac{B_{2n-1}}{(2n)} - \frac{1}{(3)} \cdot \frac{B_{2n-3}}{(2n-2)} + \frac{1}{(5)} \cdot \frac{B_{2n-5}}{(2n-4)} - \cdots$$
$$\cdots + (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n+1)} = (-1)^{n+1} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(2n)}$$

oder

$$\frac{1}{(1)} \cdot \frac{B_{2n-1}}{(2n)} - \frac{1}{(3)} \cdot \frac{B_{2n-3}}{(2n-2)} + \frac{1}{(5)} \cdot \frac{B_{2n-5}}{(2n-4)} - \cdots$$
$$= (-1)^{n+1} \left[ \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(2n)} - \frac{1}{(2n+1)} \right]$$

Multiplizirt man beiderseits mit $(2n+1)$ und bemerkt, dafs

$$\frac{(2n+1)}{1} \cdot \frac{1}{(2n)} = \frac{1.2.3 \ldots (2n+1)}{1.1.2.3 \ldots (2n)} = \frac{2n+1}{1}$$

$$\frac{(2n+1)}{(3)} \cdot \frac{1}{(2n-2)} = \frac{1.2.3 \ldots (2n+1)}{1.2.3.1.2.3 \ldots (2n-2)} = \frac{(2n+1)2n(2n-1)}{1.2.3}$$

u. s. f.

endlich

$$\frac{(2n+1)}{2\,(2n)} = \frac{2n+1}{2} \quad \text{und} \quad \frac{(2n+1)}{(2n+1)} = 1$$

ist, so wird

$$\frac{2n+1}{1} B_{2n-1} - \frac{(2n+1)\,2n\,(2n-1)}{1.2.3} B_{2n-3}$$
$$+ \frac{(2n+1)\,2n\,(2n-1)\,(2n-2)\,(2n-3)}{1.2.3.4.5} B_{2n-5} - \cdots$$
$$= (-1)^{n+1} \left[ \frac{2n+1}{2} - 1 \right] = (-1)^{n+1} \frac{2n-1}{2}$$

oder, wenn man sich an die Bezeichnung der Binomialcoeffizienten erinnert,

$$\left.\begin{aligned} (2n+1)_1 B_{2n-1} - (2n+1)_3 B_{2n-3} + (2n+1)_5 B_{2n-5} - \cdots \\ = (-1)^{n+1} \cdot \frac{2n-1}{2} \end{aligned}\right\} (2)$$

Diese Gleichung, welche eine interessante Beziehung der Bernoulli'schen Zahlen zu den Binomialcoeffizienten aufweist, kann sehr gut zur successiven Berechnung jener Zahlen benutzt werden, wenn man der Reihe nach $n = 1, 2, 3, \ldots$ setzt. Man erhält nämlich nach einander

Digitized by Google

$$3B_1 = \frac{1}{2}, \text{ folglich } B_1 = \frac{1}{6}$$

$$5B_3 - 10B_1 = -\frac{3}{2} \text{ oder } 5B_3 - 10 \cdot \frac{1}{6} = -\frac{3}{2}$$

$$\text{woraus folgt } B_3 = \frac{1}{30}$$

$$7B_5 - 35B_3 + 21B_1 = \frac{5}{2} \text{ oder } 7B_5 - 35 \cdot \frac{1}{30} + 21 \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{2}$$

$$\text{mithin } B_5 = \frac{1}{42} \text{ u. s. f.}$$

Eine ähnliche Relation läfst sich für die **Sekantencoeffizienten** auffinden, wenn man die Gleichung

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}$$

$$= 1 + \frac{B_2 x^2}{(2)} + \frac{B_4 x^4}{(4)} + \frac{B_6 x^6}{(6)} + \cdots$$

mit $\cos x$ multiplizirt, für $\cos x$ die gleichgeltende Reihe setzt, rechts Alles nach Potenzen von $x$ ordnet und dann die Coeffizienten gleicher Potenzen von $x$ in eine Gleichung stellt. Man erhält leicht

$$(2n)_0 B_{2n} - (2n)_2 B_{2n-2} + (2n)_4 B_{2n-4} - \ldots = 0 \quad (3)$$

woraus man, unter der Bemerkung, dafs $B_0 = 1$ ist, für $n = 1, 2, 3, \ldots$ findet

$$B_2 - B_0 = 0, \text{ folglich } B_2 = 1$$

$$B_4 - 6B_2 + B_0 = 0 \text{ oder } B_4 - 6 + 1 = 0$$

$$\text{mithin } B_4 = 5$$

u. s. f.

---

Sehen wir an dieser Stelle auf die bis jetzt gewonnenen Resultate zurück, so bemerken wir, dafs unsere im Anfange gestellte Aufgabe: die zur vollständigen Kenntnifs der Funktionen

$x^a$, $a^x$, $\log x$, $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$, $\sec x$, $\operatorname{cosec} x$ etc.

nöthigen Relationen zu entwickeln, ziemlich umfassend gelöst ist, insofern wir nämlich jene Relationen theils in Form von Reihen, theils in der von Produkten dargestellt haben. Es giebt aber noch eine andere Darstellungsweise, nämlich in Form von fortlaufenden oder sogenannten Kettenbrüchen, und mit dieser wollen wir uns noch beschäftigen.

---

Digitized by Google

# Capitel XVII.

# Die wichtigsten Eigenschaften der Kettenbrüche.

## §. 63.

### Eigenschaften der Näherungsbrüche.

Ein Kettenbruch entsteht, wenn man mehrere beliebige Brüche so mit einander in Verbindung bringt, dafs jeder folgende einen Bestandtheil des Nenners des vorhergehenden Bruches ausmacht, wie in den folgenden Ausdrücken:

$$\frac{2}{5+\frac{3}{4}}, \quad \frac{2}{5+\frac{3}{4-\frac{1}{7}}}, \quad \frac{2}{5+\frac{3}{4-\frac{1}{7+\frac{2}{9}}}}$$

Das allgemeine Schema eines Kettenbruches ist hiernach

$$\cfrac{b_1}{a_1+\cfrac{b_2}{a_2+\cfrac{b_3}{a_3+\cfrac{b_4}{a_4+\cdots}}}}$$

wobei $a_1, a_2, a_3, \ldots b_1, b_2, b_3, \ldots$ positive oder negative, ganze oder selbst gebrochene Gröfsen bedeuten können. Die einzelnen Brüche

$$\frac{b_1}{a_1}, \quad \frac{b_2}{a_2}, \quad \frac{b_3}{a_3}, \quad \frac{b_4}{a_4}, \quad \ldots$$

welche in dem Kettenbruche vorzukommen scheinen, nennt man die Glieder desselben und den Kettenbruch selbst einen ein-, zwei-, ... $n$gliedrigen, je nachdem derselbe aus eins, zwei, ... $n$ Gliedern besteht.

Bricht man den $n$gliedrigen Kettenbruch

$$\cfrac{b_1}{a_1+\cfrac{b_2}{a_2+\cfrac{b_3}{a_3+\ddots+\cfrac{b_n}{a_n}}}}$$

der Reihe nach bei dem ersten, zweiten, dritten, ... $n$ten Nenner ab, so entstehen die Brüche:

Digitized by Google

$$\frac{b_1}{a_1},\quad \frac{b_1}{a_1+\dfrac{b_2}{a_2}},\quad \frac{b_1}{a_1+\dfrac{b_2}{a_2+\dfrac{b_3}{a_3}}},\quad \ldots.$$

welche Näherungsbrüche heifsen, weil sie sich in manchen Fällen dem Werthe des ganzen Kettenbruches successive nähern. Der erste Näherungsbruch ist nichts Anderes als das erste Glied des Kettenbruches, und der letzte ($n$te) Näherungsbruch ist der ganze Kettenbruch selbst. Richtet man die Näherungsbrüche ein, so erhält man leicht

$$\frac{b_1}{a_1},\ \frac{a_2b_1}{a_2a_1+b_2},\ \frac{a_3a_2b_1+b_3b_1}{a_3(a_2a_1+b_2)+b_3a_1},$$
$$\frac{a_4(a_3a_2b_1+b_3b_1)+b_4a_2b_1}{a_4[a_3(a_2a_1+b_2)+b_3a_1]+b_3(a_2a_1+b_2)}.$$

Bezeichnet man diese Brüche der Reihe nach mit $\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \frac{p_3}{q_3}, \ldots$ so scheint hier vom dritten an folgendes Gesetz obzuwalten:

$$\frac{p_3}{q_3}=\frac{a_3p_2+b_3p_1}{a_3q_2+b_3q_1},\quad \frac{p_4}{q_4}=\frac{a_4p_3+b_4p_2}{a_4q_3+b_4q_2},\quad \ldots$$

welches allgemein ausgesprochen so lauten würde:

$$\frac{p_n}{q_n}=\frac{a_np_{n-1}+b_np_{n-2}}{a_nq_{n-1}+b_nq_{n-2}} \qquad (1)$$

worin $n$ jede beliebige positive ganze Zahl bedeuten kann. Wäre dieses Gesetz richtig, so müfste auch sein

$$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}=\frac{a_{n+1}p_n+b_{n+1}p_{n-1}}{a_{n+1}q_n+b_{n+1}q_{n-1}} \qquad (2)$$

wie man aus dem Vorigen findet, wenn man $n+1$ an die Stelle von $n$ setzt. Könnte man nun zeigen, dafs aus dem Bildungsgesetz des Kettenbruches unter Voraussetzung der Gleichung (1) die obige Relation ebenfalls hervorginge, so würde man hieraus schliefsen können, dafs die Gleichung (2) allgemein richtig sei. Nun geht aber der nächstfolgende Näherungsbruch $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ aus dem vorhergehenden $\frac{p_n}{q_n}$ dadurch hervor, dafs man in diesem $a_n+\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}$ für $a_n$ setzt; denn es ist

$$\frac{p_n}{q_n}=\frac{b_1}{a_1+\dfrac{b_2}{a_2+\dfrac{b_3}{a_3}+\ldots+\dfrac{b_n}{a_n}}}$$

Digitized by Google

$$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 + \cdots + \cfrac{b_n}{a_n + \cfrac{b_{n+1}}{a_{n+1}}}}}}$$

Setzen wir also in (1) $a_n + \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}$ an die Stelle von $a_n$, so erhalten wir

$$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = \frac{\left(a_n + \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}\right) p_{n-1} + b_n p_{n-2}}{\left(a_n + \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}\right) q_{n-1} + b_n q_{n-2}}$$

d. i. nach Multiplikation mit $a_{n+1}$ im Zähler und Nenner

$$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = \frac{(a_{n+1} a_n + b_{n+1}) p_{n-1} + a_{n+1} b_n p_{n-2}}{(a_{n+1} a_n + b_{n+1}) q_{n-1} + a_{n+1} b_n q_{n-2}}$$

oder

$$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = \frac{a_{n+1}(a_n p_{n-1} + b_n p_{n-2}) + b_{n+1} p_{n-1}}{a_{n+1}(a_n q_{n-1} + b_n q_{n-2}) + b_{n+1} q_{n-1}}$$

und wenn man gemäfs der Gleichung (1)

$$a_n p_{n-1} + b_n p_{n-2} = p_n, \quad a_n q_{n-1} + b_n q_{n-2} = q_n$$

setzt,

$$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = \frac{a_{n+1} p_n + b_{n+1} p_{n-1}}{a_{n+1} q_n + b_{n+1} q_{n-1}}$$

Diefs ist aber die Gleichung (2); das hypothetisch angenommene Bildungsgesetz der Näherungsbrüche gilt also für den $(n+1)$sten Näherungsbruch, wenn es für den $n$ten richtig war; es gilt mithin allgemein, weil es für den dritten zutrifft. Für die successive Berechnung der Näherungsbrüche, deren letzter den Totalwerth des ganzen Kettenbruches giebt, hat man also nicht nöthig, die einzelnen Brüche

$$\frac{b_1}{a_1}, \quad \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2}}, \quad \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3}}} \quad \text{etc.}$$

sämmtlich auf die gewöhnliche Weise einzurichten, sondern berechnet blos die beiden ersten

$$\frac{b_1}{a_1}, \quad \frac{a_2 b_1}{a_2 a_1 + b_2}$$

und leitet nun aus diesen nach Formel (1) alle übrigen ab.

Digitized by Google

Bemerkenswerth sind noch die Ausdrücke für die Differenz zweier auf einander folgenden Näherungsbrüche. Es ist nämlich

$$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{a_{n+1}p_n + b_{n+1}p_{n-1}}{a_{n+1}q_n + b_{n+1}q_{n-1}} - \frac{p_n}{q_n}$$
$$= \frac{b_{n+1}p_{n-1}q_n - b_{n+1}p_nq_{n-1}}{q_{n+1}q_n}$$
$$= -\frac{b_{n+1}}{q_{n+1}q_n}(p_nq_{n-1} - p_{n-1}q_n)$$

Ferner hat man

$$\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{p_nq_{n-1} - p_{n-1}q_n}{q_nq_{n-1}}$$

folglich

$$p_nq_{n-1} - p_{n-1}q_n = q_nq_{n-1}\left(\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right)$$

und durch Substitution dieses Ausdruckes in die vorhergehende Rechnung

$$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n} = -\frac{b_{n+1}q_{n-1}}{q_{n+1}}\left(\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right)$$

Nennen wir $\Delta_n$ die Differenz links, so ist die auf der rechten Seite in Parenthesen stehende $= \Delta_{n-1}$, mithin hängt die $n$te Differenz so von der vorhergehenden ab, dafs

$$\Delta_n = -\frac{b_{n+1}q_{n-1}}{q_{n+1}}\Delta_{n-1} \qquad (3)$$

ist. Hiernach kann man alle Differenzen berechnen, weil man die erste kennt,

$$\Delta_1 = \frac{a_2b_1}{a_2a_1 + b_2} - \frac{b_1}{a_1} = -\frac{b_1b_2}{q_1q_2} \qquad (4)$$

Unter der Voraussetzung, dafs die Gröfsen $a_1, a_2, a_3, \ldots, b_1, b_2, b_3, \ldots$ sämmtlich positiv sind, lassen sich hieraus noch mancherlei Folgerungen ziehen. Dann ist nämlich $\Delta_1$ negativ, $\Delta_2$ positiv, $\Delta_3$ negativ, $\Delta_4$ positiv u. s. f., oder wenn man das Negative und Positive durch $< 0$ und $> 0$ unterscheidet,

$$\frac{p_2}{q_2} - \frac{p_1}{q_1} < 0, \quad \frac{p_3}{q_3} - \frac{p_2}{q_2} > 0$$
$$\frac{p_4}{q_4} - \frac{p_3}{q_3} < 0, \quad \frac{p_5}{q_5} - \frac{p_4}{q_4} > 0$$
u. s. f.

woraus folgt

Digitized by Google

$$\frac{p_1}{q_1} > \frac{p_2}{q_2}, \quad \frac{p_2}{q_2} < \frac{p_3}{q_3}$$
$$\frac{p_3}{q_3} > \frac{p_4}{q_4}, \quad \frac{p_4}{q_4} < \frac{p_5}{q_5}$$
u. s. f.

Es ist aber auch, abgesehen von den Vorzeichen, jede Differenz kleiner als die vorhergehende. Denn in der Gleichung (3) hat man

$$\frac{b_{n+1} q_{n-1}}{q_{n+1}} = \frac{b_{n+1} q_{n-1}}{a_{n+1} q_n + b_{n+1} q_{n-1}}$$

folglich, weil alle die Gröfsen $a$ und $b$, mithin auch alle $p$ und $q$ positiv sind,

$$\frac{b_{n+1} q_{n-1}}{q_{n+1}} < 1$$

und also

$$\triangle_n < \triangle_{n-1}$$

wenn man blos die numerischen Werthe berücksichtigt. Wir haben also z. B. den numerischen Werth von $\frac{p_2}{q_2} - \frac{p_1}{q_1}$ > als den von $\frac{p_3}{q_3} - \frac{p_2}{q_2}$, oder, weil die erste Differenz an sich negativ, folglich ihr numerischer Werth das Entgegengesetzte ist,

$$\frac{p_1}{q_1} - \frac{p_2}{q_2} > \frac{p_3}{q_3} - \frac{p_2}{q_2}$$

woraus

$$\frac{p_1}{q_1} > \frac{p_3}{q_3}$$

folgt. Ebenso würde aus

$$\frac{p_3}{q_3} - \frac{p_4}{q_4} > \frac{p_5}{q_5} - \frac{p_4}{q_4}$$

folgen

$$\frac{p_3}{q_3} > \frac{p_5}{q_5}$$ u. s. f.

Die Näherungsbrüche ungerader Ordnung nehmen also beständig ab.

Der numerische Werth von $\triangle_3$ ist ferner kleiner als der von $\triangle_2$, oder, weil $\triangle_3$ an sich negativ ist,

$$\frac{p_3}{q_3} - \frac{p_4}{q_4} < \frac{p_3}{q_3} - \frac{p_2}{q_2}$$

woraus folgt



Digitized by Google

$$\frac{p_2}{q_2} < \frac{p_4}{q_4}$$

Ebenso würde man

$$\frac{p_4}{q_4} < \frac{p_6}{q_6} \text{ u. s. f.}$$

finden. Die Näherungsbrüche gerader Ordnung nehmen also immer ab.

Wir haben hier für Kettenbrüche, deren sämmtliche Zähler und Nenner positiv sind, die merkwürdige Eigenschaft kennen gelernt, dafs die Näherungsbrüche ungerader Ordnung eine fallende, die gerader Ordnung eine steigende Reihe bilden, während die Differenzen der benachbarten Näherungsbrüche ihren absoluten Werthen nach immer abnehmen. Da nun der letzte Näherungsbruch der Werth des ganzen Kettenbruches ist, so mufs folglich eine Annäherung an den Werth des ganzen Kettenbruches statt finden. Man kann sich dieses Verhältnifs leicht durch eine Zeichnung veranschaulichen. Man trage nämlich, wie in Fig. 35, auf einer geraden Linie $SP$ in gleichen Entfernungen von einander die Punkte $P_1, P_2, P_3, \ldots$ auf, errichte in jedem derselben eine Senkrechte und nehme nach irgend einem Maafsstabe $P_1 Q_1 = \frac{p_1}{q_1}$, $P_2 Q_2 = \frac{p_2}{q_2}$, $P_3 Q_3 = \frac{p_3}{q_3}$ u. s. f. Endlich mache man $PQ$ dem Gesammtwerthe des Kettenbruches gleich und ziehe durch $Q$ eine Parallele $QT$ zu $PS$. Verbindet man jetzt die Punkte $Q_1, Q_3, Q_5, \ldots$ und ebenso $Q_2, Q_4, Q_6, \ldots$ durch eine zusammenhängende krumme Linie, so erhält man zwei Curven, deren erstere vom Punkte $Q_1$ nach der Geraden $QT$ zu herabsteigt, während die zweite vom Punkte $Q_2$ aus nach jener Geraden hinaufsteigt und zugleich die Differenzen zwischen je zwei auf einander folgenden Senkrechten beständig abnehmen. Der letzte Näherungsbruch $\frac{p_n}{q_n}$ eines $n$gliedrigen Kettenbruches ist dann der Gesammtwerth $PQ$ des ganzen Kettenbruches.

Bei weitem weniger einfach gestalten sich die Eigenschaften der Näherungsbrüche in den Fällen, wo einige oder alle Glieder eines Kettenbruches negativ sind. Nur in einem einzigen Falle läfst sich hier eine bemerkenswerthe Eigenschaft der Näherungsbrüche angeben, wenn nämlich alle Glieder des Kettenbruches mit Ausnahme des ersten negativ und zugleich ganzzahlige ächte Brüche sind. Unter der gemachten Voraussetzung hat dann der Kettenbruch die Form

Digitized by Google

$$\cfrac{b_1}{a_1 - \cfrac{b_2}{a_2 - \cfrac{b_3}{a_3 - \ldots}}}$$

worin $a_1, a_2, a_3, \ldots b_1, b_2, b_3, \ldots$ ganze Zahlen sind, welche die Eigenschaften

$$a_1 > b_1,\ a_2 > b_2,\ a_3 > b_3,\ \ldots$$

haben. Hier ist nun

$$\frac{b_1}{a_1} < \cfrac{b_1}{a_1 - \cfrac{b_2}{a_2}}$$

denn in dem zweiten Näherungsbruche ist der Nenner vermindert, folglich der Quotient gröfser. Man kann noch bemerken, dafs derselbe immer noch ein ächter Bruch ist, weil im Nenner $a_1$ wenigstens um eine Einheit gröfser als $b_1$ sein mufs, aber die Verminderung keine volle Einheit beträgt, indem $\frac{b_1}{a_1} < 1$ ist. Ferner hat man

$$\cfrac{b_1}{a_1 - \cfrac{b_2}{a_2}} < \cfrac{b_1}{a_1 - \cfrac{b^2}{a_2 - \cfrac{b_3}{a_3}}}$$

Denn es wird rechts der Nenner $a_1$ um einen gröfseren Bruch vermindert als links, weil

$$\frac{b_2}{a_2} < \cfrac{b_2}{a_2 - \cfrac{b_3}{a_3}}$$

ist, wiewohl beide Ausdrücke ächte Brüche sind. Man kann auf diese Weise fortfahren, zu schliefsen und findet so das Resultat, dafs jeder Näherungsbruch kleiner als der nächstfolgende ist, die Näherungsbrüche also eine steigende Reihe bilden. Die ganze Schlufsweise würde aber nicht passen, wenn nicht alle einzelnen Glieder des Kettenbruches ächte Brüche wären, weil dann einer der Nenner in den Näherungsbrüchen negativ werden könnte, wie z. B. in dem Kettenbruche

$$\cfrac{1}{3 - \cfrac{7}{4 - \cfrac{9}{5 - \cfrac{1}{6}}}}$$

wo schon der zweite Näherungsbruch negativ wird.



Digitized by Google

Es ist übrigens sehr leicht, einen gegebenen Bruch in einen Kettenbruch von vorgeschriebener Form zu verwandeln. Wollte man z. B. den Bruch $\frac{289}{761}$ in einen Kettenbruch von der Form

$$\cfrac{1}{2+\cfrac{3}{4+\cfrac{5}{6+\cfrac{7}{8+..}}}}$$

auflösen, so würde man folgende von selbst verständliche Rechnung zu machen haben:

$$\frac{289}{761} = \frac{1}{\frac{761}{289}} = \frac{1}{2+\frac{183}{289}}$$

$$\frac{183}{289} = \frac{3 \cdot 183}{867} = \frac{3}{\frac{867}{183}} = \frac{3}{4+\frac{135}{183}}$$

$$\frac{135}{183} = \frac{5 \cdot 135}{915} = \frac{5}{\frac{915}{135}} = \frac{5}{6+\frac{105}{135}}$$

$$\frac{105}{135} = \frac{7 \cdot 105}{945} = \frac{7}{\frac{945}{105}} = \frac{7}{8+\frac{105}{105}} = \frac{7}{8+1}$$

Weiter kann man hier nicht gehen, weil der letzte Rest kein Bruch, sondern die Einheit ist. Substituirt man jede Gleichung in die vorhergehende, so erhält man

$$\frac{289}{761} = \cfrac{1}{2+\cfrac{3}{4+\cfrac{5}{6+\cfrac{7}{8+1}}}}$$

also den Bruch in der vorgeschriebenen Form, so weit dieſs überhaupt möglich ist.

Wollte man denselben Bruch in einen Kettenbruch von der Form

$$\cfrac{2}{5+\cfrac{4}{7+\cfrac{6}{9+\cfrac{8}{11+..}}}}$$

Digitized by Google

verwandeln, so stünde die Rechnung so:

$$\frac{289}{761} = \frac{2 \cdot 289}{1522} = \frac{2}{\frac{1522}{289}} = \frac{2}{5 + \frac{77}{289}}$$

$$\frac{77}{289} = \frac{4 \cdot 77}{1156} = \frac{4}{\frac{1156}{77}} = \frac{4}{7 + \frac{617}{77}}$$

$$\frac{617}{77} = \frac{6 \cdot 617}{462} = \frac{6}{\frac{462}{617}} = \frac{6}{9 - \frac{5091}{617}}$$

Will man keine negativen Glieder, so mufs man hier abbrechen und erhält durch Substitution jeder Gleichung in die vorhergehende:

$$\frac{289}{761} = \cfrac{2}{5 + \cfrac{4}{7 + \cfrac{6}{9 - \frac{5091}{617}}}}$$

wobei die verlangte Form so weit beobachtet ist, als es nur geschehen kann. Diefs Beispiel zeigt zugleich, dafs man den nämlichen Bruch in unendlich viele Kettenbrüche verwandeln könne.

Es läfst sich recht gut denken, dafs es Rechnungen der Art geben könne, bei denen man ins Unendliche fortgehen dürfte, ohne auf negative Glieder zu stofsen, d. h. mit anderen Worten, dafs es auch unendliche Kettenbrüche geben könnte, deren successive Näherungsbrüche sich einem bestimmten endlichen Werthe als Gränze beständig näherten. Wir wollen diesen wichtigen Gegenstand einer näheren Betrachtung unterwerfen.

## §. 64.

### Die unendlichen Kettenbrüche, ihre Convergenz und Divergenz.

I. Wir wollen uns zunächst mit denjenigen Kettenbrüchen beschäftigen, deren Glieder sämmtlich positiv sind, so dafs also in dem Ausdrucke

$$\cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 + \ldots \text{ in inf.}}}}$$

welcher das Thema unserer Untersuchungen ausmacht, die Gröfsen $a_1$, $a_2$, ... $b_1$, $b_2$, ... durchgängig positiv sind.

Digitized by Google

gränzt der Null nähern, und er divergirt gewifs, wenn diese Bedingung nicht statt findet.

Nun ist aber überhaupt nach Formel (3) §. 63

$$\Delta_n = -\frac{b_{n+1}q_{n-1}}{q_{n+1}}\Delta_{n-1}$$

und hieraus findet man der Reihe nach

$$\Delta_2 = -\frac{b_3 q_1}{q_3}\Delta_1$$

$$\Delta_3 = -\frac{b_4 q_2}{q_4}\Delta_2 = \frac{b_3 q_1}{q_3}\cdot\frac{b_4 q_2}{q_4}\Delta_1$$

$$\Delta_4 = -\frac{b_5 q_3}{q_5}\Delta_3 = -\frac{b_3 q_1}{q_3}\cdot\frac{b_4 q_2}{q_4}\cdot\frac{b_5 q_3}{q_5}\Delta_1$$

u. s. f.

überhaupt

$$\Delta_n = (-1)^{n-1}\frac{b_3 q_1}{q_3}\cdot\frac{b_4 q_2}{q_4}\cdot\frac{b_5 q_3}{q_5}\cdots\frac{b_{n+1}q_{n-1}}{q_{n+1}}\Delta_1 \qquad (1)$$

Man bemerkt leicht, dafs hier $\Delta_n$ durch ein Produkt von lauter ächten Brüchen dargestellt wird; denn die einzelnen Brüche sind von der Form

$$\frac{b_{m+1}q_{m-1}}{q_{m+1}} = \frac{b_{m+1}q_{m-1}}{a_{m+1}q_m + b_{m+1}q_{m-1}}$$

und hier sieht man gleich, dafs der Nenner gröfser als der Zähler ist, weil alle $a$ und $b$, folglich auch alle $q$, positiv sind. Da es uns blos auf absolute Werthe ankommt, so ist

$$Lim\ \Delta_n = \Delta_1\cdot\frac{b_3 q_1}{q_3}\cdot\frac{b_4 q_2}{q_4}\cdot\frac{b_5 q_3}{q_5}\cdots in\ inf.$$

Ein unendliches Produkt von ächten Brüchen kann aber ebensowohl eine endliche bestimmte Gröfse, als die Null zur Gränze haben. Der erste Fall tritt leicht dann ein, wenn die einzelnen Faktoren durch Zunahme sich mehr und mehr der Einheit nähern; wir müssen ihn daher zu vermeiden suchen. Sind aber alle Faktoren kleiner als ein gewisser, selbst ächter Bruch $\frac{1}{u}$ (wo $u > 1$ ist), so hat man nach (1)

$$\Delta_n < \left(\frac{1}{u}\right)^{n-1}\Delta_1$$

folglich, weil $Lim\left(\frac{1}{u}\right)^{n-1} = 0$ ist, um so mehr

$$Lim\ \Delta_n = 0$$

Digitized by Google

Es convergirt also der in Rede stehende Kettenbruch ganz gewifs, wenn alle die einzelnen Faktoren

$$\frac{b_3 q_1}{q_3},\ \frac{b_4 q_2}{q_4},\ \frac{b_5 q_3}{q_5},\ \ldots\ in\ inf.$$

kleiner als die Einheit sind und es bleiben, so weit man auch in der Reihe selbst fortgehen mag. Wir können diese Bedingung ganz einfach durch die Ungleichung

$$Lim\ \frac{b_{n+1} q_{n-1}}{q_{n+1}} < 1$$

ausdrücken.

Es ist aber

$$\frac{b_{n+1} q_{n-1}}{q_{n+1}} = \frac{b_{n+1} q_{n-1}}{a_{n+1} q_n + b_{n+1} q_{n-1}} = \frac{1}{\frac{a_{n+1} q_n}{b_{n+1} q_{n-1}} + 1}$$

Soll nun der Gränzwerth dieses Ausdruckes unter der Einheit bleiben, so mufs

$$Lim\ \frac{a_{n+1} q_n}{b_{n+1} q_{n-1}} > 0$$

sein. Man hat aber weiter

$$\frac{a_{n+1} q_n}{b_{n+1} q_{n-1}} = \frac{a_{n+1}(a_n q_{n-1} + b_n q_{n-2})}{b_{n+1} q_{n-1}} = \frac{a_{n+1} a_n}{b_{n+1}} + \frac{a_{n+1} b_n}{b_{n+1}} \cdot \frac{q_{n-2}}{q_{n-1}}$$

Ist nun schon

$$Lim\ \frac{a_{n+1} a_n}{b_{n+1}} > 0$$

so ist offenbar die Bedingung

$$Lim\ \frac{a_{n+1} q_n}{b_{n+1} q_{n-1}} > 0$$

um so mehr erfüllt, weil $a_{n+1}$, $b_n$, $b_{n+1}$, $q_{n-2}$ und $q_{n-1}$ positive Grö-fsen sind, also $Lim\ \frac{a_{n+1} b_n}{b_{n+1}} \cdot \frac{q_{n-2}}{q_{n-1}}$ nicht negativ werden kann. Wir können also sagen:

der Kettenbruch

Digitized by Google

$$\cfrac{b_1}{a_1+\cfrac{b_2}{a_2+\cfrac{b_3}{a_3+\ldots}}} \tag{2}$$

worin alle $a$ und $b$ positiv sind, convergirt ganz sicher, wenn

$$Lim\ \frac{a_n a_{n+1}}{b_{n+1}} > 0 \tag{3}$$

ist, bei unbegränzt wachsenden $n$. Findet aber diese Bedingung nicht statt, so läfst sich nicht entscheiden, ob der Kettenbruch convergire oder divergire.

So wird man z. B. unter Anwendung dieser Regel finden, dafs von den Kettenbrüchen

$$\cfrac{1^2}{3+\cfrac{2^2}{5+\cfrac{3^2}{7+\ldots}}}$$

$$\cfrac{1^2}{2+\cfrac{2^2}{2+\cfrac{3^2}{2+\ldots}}}$$

der erste ganz sicher convergirt, während man diefs von dem zweiten nicht behaupten kann.

II. Auch bei denjenigen Kettenbrüchen, in welchen alle Glieder, mit Ausnahme des ersten, negativ sind, können Fälle der Convergenz oder Divergenz vorkommen. Einen convergenten Kettenbruch nennen wir hier wieder denjenigen, dessen Näherungsbrüche sich einer einzigen bestimmten Gröfse als Gränze fortwährend nähern, divergent jeden, welcher diese Eigenschaft nicht besitzt. Im Allgemeinen ist die Convergenz bei Kettenbrüchen mit negativen Gliedern sehr schwer zu entscheiden und es läfst sich mit Sicherheit nur an einer einzigen Art von Kettenbrüchen nachweisen, die aber für uns auch gerade die wichtigste ist. Sind nämlich in dem unendlichen Kettenbruche

$$\cfrac{b_1}{a_1-\cfrac{b_2}{a_2-\cfrac{b_3}{a_3-\ldots}}} \tag{4}$$

alle einzelnen Glieder

Digitized by Google

$$\frac{b_1}{a_1},\ \frac{b_2}{a_2},\ \frac{b_3}{a_3},\ \ldots$$

ächte Brüche, welche ganze positive Zahlen zu Zählern und Nennern haben, so convergirt der Kettenbruch ganz sicher.

Zuerst nämlich bemerkt man leicht, dafs alle Näherungsbrüche positive ächte Brüche sind. Denn da alle $a$ und $b$ ganze Zahlen, $\frac{b_1}{a_1}$, $\frac{b_2}{a_2}$, ... ächte Brüche sind, so mufs $a_1$ von $b_1$ wenigstens um eine Einheit differiren. Es wird aber in dem zweiten Näherungsbruche

$$\frac{b_1}{a_1 - \frac{b_2}{a_2}}$$

von $a_1$ keine volle Einheit, sondern nur ein Bruchtheil derselben abgezogen, folglich ist noch immer

$$a_1 - \frac{b_2}{a_2} > b_1$$

mithin der zweite Näherungsbruch $\frac{p_2}{q_2}$ ein positiver ächter Bruch. — In

$$\frac{p_3}{q_3} = \frac{b_1}{a_1 - \frac{b_2}{a_2 - \frac{b_3}{a_3}}}$$

ist nun ferner aus ganz denselben Gründen

$$\frac{b_2}{a_2 - \frac{b_3}{a_3}}$$

ein positiver ächter Bruch; wird derselbe von $a_1$ abgezogen, welches wenigstens um eine Einheit gröfser als $b_1$ ist, so bleibt

$$a_1 - \frac{b_2}{a_2 - \frac{b_3}{a_3}} > b_1$$

woraus folgt, dafs auch $\frac{p_2}{q_2}$ ein positiver ächter Bruch ist. — Aus den nämlichen Gründen mufs auch die ähnlich gebildete Gröfse

$$\frac{b_2}{a_2 - \frac{b_3}{a_3 - \frac{b_4}{a_4}}}$$

Digitized by Google

ein ächter Bruch sein, woraus folgt, dafs

$$\frac{p_4}{q_4} = \cfrac{b_1}{a_1 - \cfrac{b_2}{a_2 - \cfrac{b_3}{a_3 - \cfrac{b_4}{a_4}}}}$$

ein positiver ächter Bruch ist. Man übersieht auf der Stelle, dafs die Fortsetzung dieser Schlufsreihe ins Unendliche möglich ist und dafs sie zeigt, wie alle Näherungsbrüche ächte und positive Brüche sind.

Ferner läfst sich nun zeigen, dafs die Näherungsbrüche beständig wachsen. Man kann diefs auf ähnliche Weise wie im vorigen Paragraphen thun, gelangt aber auch auf folgende Weise dazu:

Da gezeigt worden ist, dafs

$$\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \frac{p_3}{q_3}, \frac{p_4}{q_4}, \ldots$$

sämmtlich positiv sind, so folgt leicht, dafs es auch

$$q_1, q_2, q_3, q_4, \ldots$$

sein müssen. Da ferner $b_1$ positiv ist, aber $b_2, b_3, b_4, \ldots$ alle negativ sind, so hat man aus den Formeln (3) und (4) in §. 63

$$\Delta_n = \frac{b_{n+1} q_{n-1}}{q_{n+1}} \Delta_{n-1}$$

$$\Delta_1 = \frac{b_1 b_2}{q_1 q_2}$$

Hieraus findet man für $n = 2$, 3 u. s. f.

$$\Delta_2 = \frac{p_3}{q_3} - \frac{p_2}{q_2} = \frac{b_1 b_2}{q_1 q_2} \cdot \frac{b_3 q_1}{q_3}$$

$$\Delta_3 = \frac{p_4}{q_4} - \frac{p_3}{q_3} = \frac{b_1 b_2}{q_1 q_2} \cdot \frac{b_3 q_1}{q_3} \cdot \frac{b_4 q_2}{q_4}$$

u. s. f.

Es sind also alle Differenzen positiv und daraus folgt

$$\frac{p_1}{q_1} < \frac{p_2}{q_2} < \frac{p_3}{q_3} < \frac{p_4}{q_4} \ldots$$

d. h. die Näherungsbrüche wachsen beständig. Gleichwohl können sie nicht ins Unendliche zunehmen, weil sie nach dem Vorigen immer ächte Brüche bleiben; es müssen sich folglich die successiven Näherungsbrüche durch beständige Zunahme einer gewissen festen Gränze nähern, welche höchstens die Einheit sein kann. Der in Rede stehende Kettenbruch (4) ist folglich ein convergenter.

Digitized by Google

Es giebt in der That einen, aber auch nur einen Fall, in welchem Kettenbruch

$$\cfrac{b_1}{a_1 - \cfrac{b_2}{a_2 - \cfrac{b_3}{a_3 - \dots}}}$$

orin $\frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}, \frac{b_3}{a_3}, \dots$ ächte Brüche sind, die Einheit zur Gränze hat, enn nämlich jeder der einzelnen Nenner um eine Einheit gröfser als sein ähler, der Kettenbruch also von der Form

$$\cfrac{b_1}{b_1 + 1 - \cfrac{b_2}{b_2 + 1 - \cfrac{b_3}{b_3 + 1 - \dots}}} \tag{5}$$

t, worin sonst $b_1, b_2, b_3, \dots$ ganz beliebig bleiben. Da dieser Fall on Interesse ist, so wollen wir ihn etwas näher ansehen.

Zur successiven Berechnung der Näherungsbrüche hat man hier die ormeln

$$p_{n+1} = (b_{n+1} + 1)\, p_n - b_{n+1}\, p_{n-1}$$
$$q_{n+1} = (b_{n+1} + 1)\, q_n - b_{n+1}\, q_{n-1}$$

us welchen man leicht erhält

$$p_{n+1} - p_n = (p_n - p_{n-1})\, b_{n+1} \tag{6}$$
$$q_{n+1} - q_n = (q_n - q_{n-1})\, b_{n+1} \tag{7}$$

Hieraus würden sich sehr leicht alle Differenzen zweier auf einander folgenden Näherungszähler und Näherungsnenner berechnen lassen, wenn man die jedesmalige erste dieser Differenzen wüfste. Man hat aber unmittelbar

$$\frac{p_1}{q_1} = \frac{b_1}{b_1 + 1}, \quad \frac{p_2}{q_2} = \frac{b_1 b_2 + b_1}{b_1 b_2 + b_1 + 1}$$

folglich

$$p_1 = b_1$$
$$p_2 - p_1 = b_1 b_2$$

und nun folgt aus (6) für $n = 2, 3, 4$ u. s. f.

$$p_3 - p_2 = (p_2 - p_1)\, b_3 = b_1 b_2 b_3$$
$$p_4 - p_3 = (p_3 - p_2)\, b_4 = b_1 b_2 b_3 b_4$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$p_n - p_{n-1} = \dots\dots\dots = b_1 b_2 b_3 \dots b_n$$

Digitized by Google

Addirt man alle diese Gleichungen nebst den zwei vorhergehenden, so ergiebt sich sogleich:

$$p_n = b_1 + b_1 b_2 + b_1 b_2 b_3 + \cdots + b_1 b_2 b_3 \cdots b_n \quad (8)$$

Ebenso hat man

$$q_1 = b_1 + 1$$
$$q_2 - q_1 = b_1 b_2$$

und nach (7) für $n = 2, 3, 4, \ldots$

$$q_3 - q_2 = (q_2 - q_1) b_3 = b_1 b_2 b_3$$
$$q_4 - q_3 = (q_3 - q_2) b_4 = b_1 b_2 b_3 b_4$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$q_n - q_{n-1} = \cdots\cdots\cdots = b_1 b_2 b_3 \cdots b_n$$

folglich durch Addition dieser und der vorhergehenden Gleichungen:

$$q_n = 1 + b_1 + b_1 b_2 + b_1 b_2 b_3 + \cdots + b_1 b_2 b_3 \cdots b_n$$

folglich der $n$te Näherungsbruch

$$\frac{p_n}{q_n} = \frac{b_1 + b_1 b_2 + b_1 b_2 b_3 + \cdots + b_1 b_2 \cdots b_n}{1 + b_1 + b_1 b_2 + b_1 b_2 b_3 + \cdots + b_1 b_2 \cdots b_n}. \quad (9)$$

Läfst man hier $n$ ins Unendliche wachsen, so wird offenbar $p_n$ gröfser als jede angebbare Zahl, weil es einer aus $n$ Gliedern bestehenden Reihe gleich ist, von denen jedes eine positive ganze Zahl sein mufs. Bemerkt man aber, dafs $q_n = 1 + p_n$, also

$$\frac{p_n}{q_n} = \frac{p_n}{p_n + 1} = \frac{1}{1 + \frac{1}{p_n}}$$

ist, so erhält man für unbegränzt wachsende $n$

$$Lim \frac{p_n}{q_n} = 1$$

mithin auch

$$1 = \cfrac{b_1}{b_1 + 1 - \cfrac{b_2}{b_2 + 1 - \cfrac{b_3}{b_3 + 1 - \cdots}}}$$

wodurch der Werth des Kettenbruches gefunden ist.

Nimmt man z. B. für $b_1, b_2, b_3, \ldots$ die natürlichen, die ungeraden und geraden Zahlen, so hat man

Digitized by Google

$$1 = \cfrac{1}{2-\cfrac{2}{3-\cfrac{3}{4-\ldots}}} \qquad = \cfrac{1}{2-\cfrac{3}{4-\cfrac{5}{7-\ldots}}}$$

$$= \cfrac{2}{3-\cfrac{4}{5-\cfrac{6}{7-\ldots}}}$$

und man würde auch die Näherungsbrüche dieser Kettenbrüche nach Formel (9) sehr leicht berechnen können.

Man überzeugt sich nun leicht, dafs der Werth eines Kettenbruches nicht mehr die Einheit sein könne, wenn auch nur ein einziger Nenner seinen Zähler um mehr als eine Einheit übersteigt. Ist z. B. der Kettenbruch

$$\cfrac{b_1}{b_1+1-\cfrac{b_2}{b_2+1-\cfrac{b_3}{a_3-\cfrac{b_4}{b_4+1-\ldots}}}} \qquad (10)$$

gegeben, worin $a_3$ den Zähler $b_3$ um mehr als eine Einheit übertreffen soll, so gelten folgende Schlüsse:

Der Kettenbruch

$$\cfrac{b_4}{b_4+1-\cfrac{b_5}{b_5+1-\ldots}}$$

hat die Einheit zum Gränzwerthe, weil in ihm alle Nenner die zugehörigen Zähler um eine Einheit übersteigen. Der unendliche Kettenbruch in (10) ist also gleich dem folgenden endlichen:

$$\cfrac{b_1}{b_1+1-\cfrac{b_2}{b_2+1-\cfrac{b_3}{a_3-1}}} \qquad (11)$$

Hier ist nun $\frac{b_3}{a_3-1}$ ein ächter Bruch. Denn da $b_3$ und $a_3$ ganze Zahlen bedeuten und $a_3$ die Zahl $b_3$ der Voraussetzung nach um mehr als eine Einheit übertreffen soll, so mufs $a_3$ wenigstens $= b_3+2$, also $a_3-1$ wenigstens $= b_3+1$ sein, woraus folgt

Digitized by Google

$$\frac{b_3}{a_3 - 1} < 1$$

Der Kettenbruch (11) gehört also unter diejenigen, deren einzelne Glieder ächte Brüche sind, welche ganze Zahlen zu Zählern und Nennern haben. Sein Werth, d. h. der des unendlichen Kettenbruches (10), ist demnach ein ächter Bruch, also von der Einheit verschieden. Ganz ähnliche Schlüsse sind in jedem anderen Falle anwendbar.

## §. 65.

### Die Irrationalität gewisser Kettenbrüche.

Bei den Verwandlungen gewöhnlicher Brüche in Kettenbrüche von einer gegebenen Form, wie wir diese in §. 63 vorgenommen hatten, kann man im Allgemeinen bemerken, dafs früher oder später entweder kein gebrochenes Glied mehr kommt, also der Kettenbruch sich mit einer ganzen Zahl schliefst, oder ein negatives Glied entsteht, wenn auch das vorgelegte Schema keines enthält. Diese Erscheinung tritt namentlich immer dann ein, wenn die einzelnen Glieder des gegebenen Schema's ächte Brüche sind, welche ganze Zahlen zu Zählern und Nennern haben. Man überzeugt sich hiervon leicht durch den Versuch, einen beliebigen ächten Bruch $\frac{B}{A}$ in einen Kettenbruch von der Form

$$\cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 + \ldots}}} \qquad (1)$$

in welchem die einzelnen Glieder

$$\frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}, \frac{b_3}{a_3}, \ldots$$

sämmtlich ächte Brüche sind, zu verwandeln.

I. Wir wollen zuerst voraussetzen, dafs die Glieder des Kettenbruches sämmtlich positiv sind. Soll nun $\frac{B}{A}$ in einen Kettenbruch von der obigen Form (1) transformirt werden, so mufs man dem $\frac{B}{A}$ zuvörderst den Zähler $b_1$ verschaffen und dann seinen Nenner in zwei Theile zerlegen, von welchen der eine $a_1$ ist. Diefs geschieht durch folgende Rechnung:

Digitized by Google

$$\frac{B}{A} = \frac{b_1}{\frac{b_1 A}{B}}$$

Soll dieſs gleich dem in (1) stehenden Ausdrucke sein, so folgt daraus die Gleichheit der Nenner, also

$$\frac{b_1 A}{B} = a_1 + \frac{b_2}{a_2 + \frac{b_3}{a_3 + \cdots}}$$

oder

$$\frac{b_1 A - a_1 B}{B} = \frac{b_2}{a_2 + \frac{b_3}{a_3 + \cdots}}$$

und wenn wir der Kürze wegen

$$b_1 A - a_1 B = C$$

setzen,

$$\frac{C}{B} = \frac{b_2}{a_2 + \frac{b_3}{a_3 + \cdots}} \qquad (2)$$

Es ist ferner

$$\frac{C}{B} = \frac{b_2}{\frac{b_2 B}{C}}$$

und wenn dieſs dem Kettenbruche in (2) gleich sein soll, so folgt

$$\frac{b_2 B}{C} = a_2 + \frac{b_3}{a_3 + \frac{b_4}{a_4 + \cdots}}$$

oder

$$\frac{b_2 B - a_2 C}{C} = \frac{b_3}{a_3 + \frac{b_4}{a_4 + \cdots}}$$

und wenn wir

$$b_2 B - a_2 C = D$$

setzen,

$$\frac{D}{C} = \frac{b_3}{a_3 + \frac{b_4}{a_4 + \cdots}} \qquad (3)$$

Man übersieht leicht, wie sich dieses Spiel fortführen liefse. Werden nämlich die Zahlen $C$, $D$, $E$, ... aus folgenden Gleichungen bestimmt:



Digitized by Google

$$C = b_1 A - a_1 B$$
$$D = b_2 B - a_2 C$$
$$E = b_3 C - a_3 D$$

u. s. f.

so ist

$$\frac{B}{A} = \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cdots}} \tag{4}$$

$$\frac{C}{B} = \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 + \cdots}} \tag{5}$$

$$\frac{D}{C} = \cfrac{b_3}{a_3 + \cfrac{b_4}{a_4 + \cdots}} \tag{6}$$

$$\frac{E}{D} = \cfrac{b_4}{a_4 + \cfrac{b_5}{a_5 + \cdots}} \tag{7}$$

u. s. w.

Nun convergirt aber der unendliche Kettenbruch

$$\cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 + \cdots}}}$$

ganz sicher, wenn überhaupt $a_n$ immer $> b_n$ ist, weil dann gewifs

$$Lim \frac{a_n a_{n+1}}{b_{n+1}} > 0$$

ist, und sein Gränzwerth mufs ein ächter Bruch sein, weil er kleiner als der erste Näherungsbruch $\frac{b_1}{a_1}$, und dieser selbst ein ächter Bruch ist. Wollen wir also $\frac{B}{A}$ in den unendlichen Kettenbruch (4) verwandeln, so mufs $\frac{B}{A}$ ein ächter Bruch sein. Die nämlichen Schlüsse sind aber auch auf die Gleichung (5) anwendbar. Hier ist ebenfalls der Kettenbruch rechts ein unendlicher convergenter und sein Gränzwerth $< 1$. Es ist also auch $\frac{C}{B}$ ein ächter Bruch. Aus den nämlichen Gründen sind ferner die Brüche $\frac{D}{C}$, $\frac{E}{D}$ u. s. f. ächte Brüche. Hieraus folgt nun der Reihe nach

Digitized by Google

$$A > B,\ B > C,\ C > D,\ D > E \text{ u. s. f.}$$

oder

$$A > B > C > D > E \text{ etc.}$$

Die Zahlen $A, B, C, D, \ldots$ bilden also eine unendliche abnehmende Reihe. Sie sind aber auch sämmtlich ganze Zahlen, wie man sogleich aus ihrem oben angegebenen Bildungsgesetze ersieht. Wenn aber eine Reihe von positiven ganzen Zahlen ins Unendliche abnimmt, so mufs sie an irgend einer Stelle ins Negative übergehen. Diefs kann entweder mittelst eines Durchganges durch die Null, wie in

$$6, 4, 2, 0, -2, -4, \ldots$$

oder mit Überspringung der Null, wie in

$$5, 3, 1, -1, -3, -5, \ldots$$

geschehen. Im ersten Falle müfste also eine der Zahlen $A, B, C, D, \ldots$, mithin auch einer der Brüche

$$\frac{B}{A}, \frac{C}{B}, \frac{D}{C}, \frac{E}{D}, \ldots$$

d. h. einer der Kettenbrüche:

$$\frac{b_1}{a_1 + \frac{b_2}{a_2 + \ldots}}, \quad \frac{b_2}{a_2 + \frac{b_3}{a_3 + \ldots}},$$

$$\frac{b_3}{a_3 + \frac{b_4}{a_4 + \ldots}}, \quad \frac{b_4}{a_4 + \frac{b_5}{a_5 + \ldots}}, \text{ u. s. f.}$$

gleich Null werden, was nicht möglich ist.

Im zweiten Falle mufs in der Reihe $A, B, C, D, \ldots M, N, P, \ldots$ eine der Zahlen, etwa $M$, die letzte positive, und die darauf folgende $N$ die erste negative, also der Quotient $\frac{N}{M}$ negativ sein. Es müfste also auch der entsprechende Kettenbruch, etwa

$$\frac{b_n}{a_n + \frac{b_{n+1}}{a_{n+1} + \ldots}}$$

einen negativen Werth haben, was unmöglich ist.

Aus diesen Betrachtungen folgt nun, dafs es nicht möglich ist, einen rationalen ächten Bruch in einen unendlichen Kettenbruch zu verwandeln, dessen Glieder ächte Brüche sind und ganze positive Zahlen zu Zählern und Nennern haben, weil früher oder später ein Glied erscheint, dessen



Digitized by Google

Zähler die Null oder eine negative Zahl ist. Man übersieht auch gleich, dafs dieses Glied um so früher eintreten wird, je kleiner die Zahlen $A$ und $B$ selbst sind, weil dann die Reihe $A, B, C, D, \ldots$ bald ins Negative übertritt, dafs dagegen für sehr grofse $A$ und $B$ viele Glieder des Kettenbruches positiv sein können, weil die Reihe $A, B, C, \ldots$, wenn sie hoch anfängt, lange zu laufen hat, ehe sie das Gebiet des Negativen erreicht.

Wenn aber nun umgekehrt ein unendlicher Kettenbruch von der Form gegeben wird:

$$\cfrac{b_1}{a_1+\cfrac{b_2}{a_2+\cfrac{b_3}{a_3+\ldots}}}$$

worin $\frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}, \frac{b_3}{a_3}, \ldots$ sämmtlich ächte Brüche, $a_1, a_2, \ldots b_1, b_2, \ldots$ ganze positive Zahlen sind, so kann derselbe nicht einen rationalen ächten Bruch zum Gränzwerthe haben, weil sonst gegen die Voraussetzung ein negativer oder ein sich annullirender Zähler in demselben vorkommen müfste. Aber der gesuchte Gränzwerth ist sicher ein ächter Bruch, weil er unter dem ersten Näherungsbruche $\frac{b_1}{a_1}$, der selbst ächt ist, liegen mufs. Es kann folglich der Näherungswerth des ganzen unendlichen Kettenbruches kein rationaler, sondern er mufs ein irrationaler ächter Bruch sein. Diefs stimmt auch ganz zu der Bemerkung, dafs der aus $\frac{B}{A}$ entstehende Kettenbruch desto mehr positive Glieder enthält, je gröfser $A$ und $B$ sind. Bedeutet aber $\frac{B}{A}$ einen irrationalen ächten Bruch, so sind $B$ und $A$ unendlich grofse Zahlen; der Anfang der Reihe $A, B, C, \ldots$ liegt also über jeder angebbaren Zahl (wie bei der Reihe der natürlichen Zahlen, rückwärts genommen) und folglich kann die Reihe $A, B, C, \ldots$ selbst ins Unendliche fallen, ohne negativ zu werden.

II. Ganz ähnliche Betrachtungen lassen sich für diejenigen Kettenbrüche durchführen, in denen alle Glieder, mit Ausnahme des ersten, negativ sind und ganze Zahlen zu Zählern und Nennern haben, vorausgesetzt noch, dafs von irgend einer Stelle an die Nenner ihre zugehörigen Zähler um mehr als eine Einheit übertreffen.

Ist nämlich

Digitized by Google

$$\cfrac{b_1}{a_1 - \cfrac{b_2}{a_2 - \cfrac{b_3}{a_3 - \ldots}}} \tag{8}$$

der gegebene unendliche Kettenbruch, in welchem

$$\frac{b_1}{a_1},\ \frac{b_2}{a_2},\ \frac{b_3}{a_3},\ \ldots$$

ächte Brüche, $a_1, a_2, \ldots$ $b_1, b_2, \ldots$ ganze positive Zahlen sind, so würde der Versuch, einen rationalen Bruch $\frac{B}{A}$ in jenen Kettenbruch zu verwandeln, zu folgenden Rechnungen veranlassen:

$$\frac{B}{A} = \cfrac{b_1}{\cfrac{b_1 A}{B}}$$

soll dieſs gleich dem Kettenbruche in (8) sein, so folgt

$$\frac{b_1 A}{B} = a_1 - \cfrac{b_2}{a_2 - \cfrac{b_3}{a_3 - \ldots}}$$

mithin

$$\frac{a_1 B - b_1 A}{B} = \cfrac{b_2}{a_2 - \cfrac{b_3}{a_3 - \cfrac{b_4}{a_4 - \ldots}}}$$

oder für

$$\left.\begin{aligned} a_1 B - b_1 A &= C \\ \frac{C}{B} &= \cfrac{b_2}{a_2 - \cfrac{b_3}{a_3 - \cfrac{b_4}{a_4 - \ldots}}} \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Ferner ist

$$\frac{C}{B} = \cfrac{b_2}{\cfrac{b_2 B}{C}}$$

und wenn dieſs gleich dem Kettenbruche in (9) sein soll, so muſs

$$\frac{b_2 B}{C} = a_2 - \cfrac{b_3}{a_3 - \cfrac{b_4}{a_4 - \ldots}}$$

oder für

Digitized by Google

$$\left.\begin{aligned} a_2C - b_2B &= D \\ \frac{D}{C} &= \cfrac{b_3}{a_3 - \cfrac{b_4}{a_4 - \cfrac{b_5}{a_5 - \ldots}}} \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

sein. Ebenso wäre ferner für

$$\begin{aligned} a_3D - b_3C &= E \\ \frac{E}{D} &= \cfrac{b_4}{a_4 - \cfrac{b_5}{a_5 - \cfrac{b_6}{a_6 - \ldots}}} \end{aligned}$$

u. s. w.

Vorausgesetzt nun, dafs in allen den einzelnen Kettenbrüchen

$$\cfrac{b_1}{a_1 - \cfrac{b_2}{a_2 - \ldots}}, \quad \cfrac{b_2}{b_2 - \cfrac{b_3}{a_3 - \ldots}} \quad \text{u. s. f.}$$

die Nenner ihre entsprechenden Zähler um mehr als eine Einheit übersteigen, so sind die Werthe aller jener Kettenbrüche, mithin auch die Brüche

$$\frac{B}{A}, \ \frac{C}{B}, \ \frac{D}{C}, \ \frac{E}{D}, \ \ldots$$

positiv und kleiner als die Einheit, mithin

$$A > B, \ B > C, \ C > D, \ D > E \text{ u. s. f.}$$

Hier sind nun ganz die nämlichen Schlüsse anwendbar wie früher, aus welchen folgt, dafs eine der Zahlen $A, B, C, \ldots$ gleich Null oder negativ werden mufs, was nicht sein kann, weil alle die einzelnen Kettenbrüche

$$\cfrac{b_1}{a_1 - \cfrac{b_2}{a_2 - \ldots}}, \quad \cfrac{b_2}{a_2 - \cfrac{b_3}{a_3 - \ldots}} \quad \text{u. s. f.}$$

positive ächte Brüche zu Gränzwerthen haben. Es ist also die Voraussetzung, dafs der unendliche Kettenbruch

$$\cfrac{b_1}{a_1 - \cfrac{b_2}{a_2 - \cfrac{b_3}{a_3 - \ldots}}}$$

einen rationalen Bruch zum Gränzwerthe habe, falsch, und er hat demnach einen irrationalen Gränzwerth.

Digitized by Google

Diese Betrachtungen würden aber nur theilweise passen, wenn von irgend einer Stelle an die Nenner des Kettenbruches ihre Zähler nur um eine Einheit überstiegen. Wäre z. B. der Kettenbruch von der Form

$$\cfrac{b_1}{a_1-\cfrac{b_2}{a_2-\cfrac{b_3}{b_3+1-\cfrac{b_4}{b_4+1-\ldots}}}}$$

wo nur die ersten zwei Nenner ihre Zähler um mehr als eine Einheit übersteigen, so setze man den Werth desselben $=\frac{B}{A}$; man hat dann für

$$a_1B-b_1A=C$$

$$\frac{C}{B}=\cfrac{b_2}{a_2-\cfrac{b_3}{b_3+1-\cfrac{b_4}{b_4+1-\ldots}}}$$

und für

$$a_2C-b_2B=D$$

$$\frac{D}{C}=\cfrac{b_3}{b_3+1-\cfrac{b_4}{b_4+1-\cfrac{b_5}{b_5+1-\ldots}}}$$

Nun ist der Reihe nach $\frac{B}{A}<1$, $\frac{C}{B}<1$, aber $\frac{D}{C}$ nicht $<1$, weil der Gränzwerth des entsprechenden Kettenbruches die Einheit ist. Man hat also

$$A>B,\ B>C,\ C=D=E\ldots$$

Hier geht also die Abnahme nicht ins Unendliche, sondern nur bis zu einer gewissen Stelle. Es sind also die weiteren Schlüsse nicht, wie vorhin, anwendbar; dagegen hat man wegen $D=C$ auch

$$a_2C-b_2B=C$$

folglich

$$C=\frac{b_2B}{a_2-1}$$

ferner:

$$a_1B-b_1A=\frac{b_2B}{a_2-1}$$

woraus

Digitized by Google

$$\frac{B}{A} = \frac{b_2 (a_2 - 1)}{a_1 (a_2 - 1) - b_2}$$

folgt. Dieſs würde man auch unmittelbar erhalten, wenn man bemerkte, daſs der in Rede stehende Kettenbruch dem folgenden

$$\cfrac{b_1}{a_1 - \cfrac{b_2}{a_2 - 1}}$$

gleich ist und diesen einrichtete.

Fassen wir nun alles Bisherige zusammen, so können wir das Theorem aussprechen:

Wenn in dem unendlichen Kettenbruche:

$$\cfrac{b_1}{a_1 \pm \cfrac{b_2}{a_2 \pm \cfrac{b_3}{a_3 \pm \ldots}}}$$

alle einzelnen Glieder ächte Brüche sind, welche ganze Zahlen zu Zählern und Nennern haben, wenn ferner von keiner Stelle an der Gränzwerth des übrigen unendlichen Kettenbruches der Einheit gleich ist, so hat der genannte Kettenbruch einen irrationalen ächten Bruch zum Gränzwerthe.

Wir werden später von diesem merkwürdigen Satze einige Anwendungen machen.

## §. 66.

### Verwandlung von Quadratwurzeln in Kettenbrüche.

Eines der einfachsten Beispiele für die Verwandlung der Funktionen in Kettenbrüche bieten die Wurzeln der algebraischen Gleichungen zweiten Grades dar. Soll z. B. aus der quadratischen Gleichung

$$x^2 + 2ax = b \qquad (1)$$

$x$ berechnet werden, so findet man erstlich auf gewöhnlichem Wege:

$$x = -a \pm \sqrt{a^2 + b} \qquad (2)$$

Man hat aber auch aus (1)

$$x(2a + x) = b$$

$$x = \frac{b}{2a + x} \qquad (3)$$

Substituirt man hier für das $x$ im Nenner den ganzen für $x$ geltenden Ausdruck, so erhält man

Digitized by Google

$$x = \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + x}}$$

Hier kehrt das $x$ immer im Nenner wieder; substituiren wir daher noch einmal den Werth desselben aus (3), so wird

$$x = \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + x}}} \qquad (4)$$

Hier liefse sich das nämliche Spiel wiederholen und dann immer fort ins Unendliche. Dabei entsteht aber eine wichtige Frage. Man bekommt nämlich immer längere Kettenbrüche, also auch immer mehr Näherungsbrüche:

$$\frac{b}{2a}, \quad \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a}}, \quad \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a}}}$$

Träte nun hier der günstige Umstand ein, dafs man sich durch die successive Berechnung dieser Näherungsbrüche dem Werthe $x = -a \pm \sqrt{a^2 + b}$ (wo das Vorzeichen noch zu entscheiden ist) mehr und mehr näherte und zwar bis zu jedem beliebigen Grade der Genauigkeit, so würde man offenbar sagen können, $x$ sei der Gränzwerth des unendlichen Kettenbruches

$$\cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \ldots}}}$$

und könnte also ohne Weiteres das im Nenner beständig wiederkehrende $x$ [(4)] weglassen. Derselbe Gedanke läfst sich noch schärfer so ausdrücken: wenn jeder der beiden Kettenbrüche

$$\cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \ddots + \cfrac{b}{2a + x}}}} \qquad (5)$$

und

Digitized by Google

$$\cfrac{b}{2a+\cfrac{b}{2a+\cfrac{b}{2a+\cfrac{b}{2a+\ddots+\cfrac{b}{2a}}}}} \tag{6}$$

$n$ Glieder enthält, und die Differenz zwischen ihnen bei wachsender Gliederanzahl $n$ kleiner als jede noch so kleine angebbare Zahl gemacht werden kann, so ist bei unendlicher Fortsetzung der Kettenbrüche

$$Lim \cfrac{b}{2a+\cfrac{b}{2a+\cfrac{b}{2a+\ddots+\cfrac{b}{2a+x}}}}$$

$$= Lim \cfrac{b}{2a+\cfrac{b}{2a+\cfrac{b}{2a+\ddots+\cfrac{b}{2a}}}}$$

wobei sich das Zeichen *Lim* auf das unendliche Wachsen von $n$ bezieht. Man kann also dann auch in dem ersten Kettenbruche das $x$ weglassen, weil sein Einfluſs bei wachsender Gliederzahl sich der Null nähert.

Wir hätten also zu untersuchen, ob die Differenz zwischen den Kettenbrüchen (5) und (6) bei zunehmender Gliederanzahl kleiner als jede angebbare Gröſse werden kann, oder nicht. Wir wollen aber diese Untersuchung gleich viel allgemeiner halten und fragen, unter welchen Umständen die Differenz der als $n$gliedrig vorausgesetzten Kettenbrüche

$$\cfrac{b_1}{a_1+\cfrac{b_2}{a_2+\cfrac{b_3}{a_3+\ddots+\cfrac{b_n}{a_n+r_n}}}} \tag{7}$$

und

$$\cfrac{b_1}{a_1+\cfrac{b_2}{a_2+\cfrac{b_3}{a_3+\ddots+\cfrac{b_n}{a_n}}}} \tag{8}$$

bei wachsenden $n$ unter jede noch so klein gedachte Gröſse herabsinkt. In dem ersten dieser Kettenbrüche bezeichnet $r_n$ einen durch den Verlauf der Rechnung hereingeführten Rest (wie vorher das $x$), der im zweiten Kettenbruche weggelassen ist.

Digitized by Google

Einen von den Fällen nun, in welchem die Differenz zwischen den Kettenbrüchen (7) und (8) beständig abnimmt, kann man leicht im Voraus absehen. Nähert sich nämlich der Rest $r_n$ für wachsende $n$ selbst der Null, so differirt offenbar der letzte Nenner in (7) immer weniger von dem letzten Nenner in (8), folglich, da in beiden Kettenbrüchen alles Übrige gleich ist, auch der ganze Kettenbruch in (7) immer weniger von (8). Diese Differenz mufs sich aber auch so klein machen lassen, als man will, weil wegen des unbegränzten Abnehmens von $r_n$ der Fehler, den man begeht, wenn $a_n$ für $a_n + r_n$ genommen wird, kleiner als jede angebbare Gröfse werden kann.

Aber es giebt noch viel glücklichere Fälle, in denen die Differenz zwischen den Kettenbrüchen (7) und (8) unter jede noch so klein gedachte Gröfse herabsinken kann, wenn man nur die Gliederzahl $n$ hinreichend grofs werden läfst. Wir wollen diefs auf folgendem Wege untersuchen. Bezeichnen wir die Kettenbrüche

$$\cfrac{b_1}{a_1+\cfrac{b_2}{a_2+\cdots+\cfrac{b_{n-2}}{a_{n-2}}}}, \quad \cfrac{b_1}{a_1+\cfrac{b_2}{a_2+\cdots+\cfrac{b_{n-1}}{a_{n-1}}}}$$

mit $\frac{p_{n-2}}{q_{n-2}}$, $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ und den Kettenbruch in (8) mit $\frac{p_n}{q_n}$, so ist nach §. 63 Formel (1)

$$\frac{p_n}{q_n} = \frac{a_n p_{n-1} + b_n p_{n-2}}{a_n q_{n-1} + b_n q_{n-2}} \qquad (9)$$

Der Kettenbruch (7), dessen Werth durch $\frac{P_n}{Q_n}$ angedeutet werden möge, entsteht aber aus dem in (8) dadurch, dafs man $a_n + r_n$ für $a_n$ setzt; es ist also

$$\frac{P_n}{Q_n} = \frac{(a_n + r_n) p_{n-1} + b_n p_{n-2}}{(a_n + r_n) q_{n-1} + b_n q_{n-2}}$$
$$= \frac{a_n p_{n-1} + b_n p_{n-2} + p_{n-1} r_n}{a_n q_{n-1} + b_n q_{n-2} + q_{n-1} r_n}$$

mithin, wenn man für $p_n$ und $q_n$ ihre Werthe aus (9) setzt,

$$\frac{P_n}{Q_n} = \frac{p_n + p_{n-1} r_n}{q_n + q_{n-1} r_n}$$

Um nun die Differenz der Kettenbrüche (7) und (8) in Rechnung zu be-

Digitized by Google

kommen, ziehen wir beiderseits $\frac{p_n}{q_n}$ ab, wodurch bei Reduktion auf gleichen Nenner zum Vorschein kommt:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{P_n}{Q_n} - \frac{p_n}{q_n}\\ &= \frac{p_{n-1}q_n r_n - p_n q_{n-1} r_n}{(q_n + q_{n-1} r_n) q_n} = -\frac{r_n}{q_n + q_{n-1} r_n} \cdot \frac{p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1}}{q_n}\end{aligned}\right\} (10)$$

Es ist aber ferner

$$\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1}}{q_n q_{n-1}}$$

folglich durch beiderseitige Multiplikation mit $q_{n-1}$

$$q_{n-1}\left(\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right) = \frac{p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1}}{q_n}$$

Hier ist die rechte Seite nichts Anderes, als der zweite Faktor in der Gleichung (10). Substituiren wir dort die linke Seite unserer Gleichung für denselben, so wird

$$\frac{P_n}{Q_n} - \frac{p_n}{q_n} = -\frac{q_{n-1} r_n}{q_{n-1} r_n + q_n}\left(\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right) \qquad (11)$$

Hier haben wir nun zwei Fälle zu unterscheiden.

I. Es seien alle in (7) und (8) vorkommenden $a$, $b$ und $r$, mithin sämmtliche Glieder und Reste positiv. Dann sind auch alle $p$ und $q$ positiv und der erste Faktor rechts in (11) ist ein ächter Bruch, der zweite eine Gröfse, welche beständig abnimmt, ohne dafs sie sich jedoch der Null zu nähern brauchte (§. 64). Soll aber der gefundene Ausdruck sich der Null unbegränzt nähern, so mufs einer der beiden Faktoren selbst die Null zur Gränze haben.

Nun läfst sich der erste Faktor auch in folgender Form schreiben:

$$\frac{1}{1 + \frac{q_n}{q_{n-1} r_n}}$$

und wenn diefs die Null zur Gränze haben soll, mufs

$$Lim\ \frac{q_n}{q_{n-1} r_n} = \infty$$

sein. Man hat aber ferner

$$\frac{\frac{q_n}{q_{n-1} r_n}}{= \frac{a_n q_{n-1} + b_n q_{n-2}}{q_{n-1} r_n} = \frac{a_n}{r_n} + \frac{b_n}{r_n} \cdot \frac{q_{n-2}}{q_{n-1}}}$$

Digitized by Google

Hier ist nun ganz sicher $Lim \frac{q_n}{q_{n-1} r_n} = \infty$, wenn schon $Lim \frac{a_n}{r_n} = \infty$ ist, weil das, was zu $\frac{a_n}{r_n}$ noch hinzukommt, um die Gleichung herzustellen, eine positive Gröfse ist. Die Differenz zwischen den Kettenbrüchen (7) und (8) nähert sich also gewifs der Null, wenn

$$Lim \frac{a_n}{r_n} = \infty \qquad (12)$$

ist, was entweder dadurch geschehen kann, dafs $Lim\ a_n = \infty$ und $Lim\ r_n$ eine endliche Gröfse ist, oder dadurch, dafs $Lim\ a_n$ von Null verschieden und $Lim\ r_n = 0$ ist, wie wir früher unmittelbar bemerkt haben. Da der erste Faktor in (11) ein ächter Bruch bleibt, so könnte

$$Lim \left( \frac{P_n}{Q_n} - \frac{p_n}{q_n} \right) = 0$$

auch dann werden, wenn $Lim \left( \frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} \right)$, d. h. $Lim\ \Delta_{n-1} = 0$ würde. Diesen Fall haben wir schon untersucht; er ist derjenige, in welchem der Kettenbruch (8) convergirt. Die Differenz zwischen den Kettenbrüchen (7) und (8) nähert sich also auch dann der Null, wenn der letztere convergirt, was immer geschieht, wenn

$$Lim \frac{a_n a_{n+1}}{b_{n+1}} > 0 \qquad (13)$$

ist (§. 64).

II. Weniger einfach gestalten sich die Resultate, wenn die Gröfsen $b_2, b_3, b_4, \ldots$ und $r_n$ negativ, also alle Glieder, mit Ausnahme des ersten, negativ sind und die Kettenbrüche (7) und (8) die Form haben:

$$\cfrac{b_1}{a_1 - \cfrac{b_2}{a_2 - \cfrac{b_3}{a_3 - \ddots - \cfrac{b_n}{a_n - r_n}}}} \qquad (14)$$

$$\cfrac{b_1}{a_1 - \cfrac{b_2}{a_2 - \cfrac{b_3}{a_3 - \ddots - \cfrac{b_n}{a_n}}}} \qquad (15)$$

Hier ist dann

Digitized by Google

$$\frac{P_n}{Q_n} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{q_{n-1} r_n}{-q_{n-1} r_n + q_n} \left( \frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} \right)$$

oder

$$\frac{P_n}{Q_n} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{1}{\frac{q_n}{q_{n-1} r_n} - 1} \left( \frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} \right) \qquad (16)$$

Hieraus ersieht man erstlich, dafs die fragliche Differenz zwischen den Kettenbrüchen (14) und (15) sich der Null nähert, wenn diefs mit $r_n$ der Fall ist, was wir schon früher unmittelbar bemerkt haben. Es giebt aber noch einen zweiten, günstigeren Fall. Ist nämlich der Kettenbruch (15) ein convergenter, was immer statt findet, wenn seine einzelnen Glieder ächte Brüche sind, so hat man

$$Lim \left( \frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} \right) = 0$$

Daraus allein folgt aber noch nicht, dafs der Ausdruck in (16) sich der Null nähert, weil es geschehen könnte, dafs in dem ersten Faktor

$$Lim \frac{q_n}{q_{n-1} r_n} = 1$$

mithin

$$Lim \frac{1}{\frac{q_n}{q_{n-1} r_n} - 1} = \infty$$

wäre. Es würde dann der ganze in Rede stehende Ausdruck aus zwei Faktoren zusammengesetzt sein, von denen der eine immer zu-, der andere beständig abnähme, und es könnte dann das Produkt eine endliche Gröfse zur Gränze haben. Wir müssen daher noch darauf sehen, dafs $Lim \frac{q_n}{q_{n-1} r_n}$ von der Einheit verschieden sei. Sind nun alle Nenner $a$ gröfser als die Zähler $b$, was wir der Convergenz wegen voraussetzen müssen, so ist jeder Näherungsnenner $q_n$ gröfser als der vorhergehende $q_{n-1}$*), mithin $\frac{q_n}{q_{n-1}} > 1$. Diefs hindert aber nicht, dafs $Lim \frac{q_n}{q_{n-1}} = 1$ sei (wie z. B. $Lim \frac{m+1}{m}$ für wachsende $m$). Ferner ist

*) Der Beweis davon, dafs hier immer $q_n > q_{n-1}$ ist, lautet kurz: Gesetzt, man wüfste schon, dafs $q_{n-1} > q_{n-2}$ sei, so mufs auch

$$q_{n-1} > \frac{b_n}{a_n - 1} q_{n-2}$$

Digitized by Google

$$Lim \frac{q_n}{q_{n-1} r_n} = Lim \frac{q_n}{q_{n-1}} \cdot Lim \frac{1}{r_n}$$

Da nun möglicher Weise der erste Faktor sich der Einheit nähern kann, so mufs, wenn wir sicher gehen wollen, $Lim \frac{1}{r_n}$ von der Einheit verschieden, und zwar $> 1$ sein. Die Differenz zwischen den Kettenbrüchen (14) und (15) nähert sich also auch dann für wachsende $n$ unbegränzt der Null, wenn der Kettenbruch (15) convergirt, was nur unter der Bedingung als gewifs behauptet werden kann, dafs alle die Brüche

$$\frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}, \frac{b_3}{a_3}, \ldots$$

ganzzahlige ächte sind und wenn zugleich in (14) $Lim\, r_n > 1$ ist.

---

Kehren wir nach diesen Untersuchungen zu den Kettenbrüchen (5) und (6) zurück, so können wir jetzt die Sache leicht entscheiden. Dieselben enthalten nur positive Glieder und der in (6) verzeichnete convergirt, auch wenn er ins Unendliche fortgesetzt wird, weil in ihm gemäfs (13)

$$Lim \frac{a_n a_{n+1}}{b_{n+1}} = \frac{4a^2}{b} > 0$$

ist und zwar für jedes $a$ und $b$, da wir den Fall $b = 0$ von selbst ausschliefsen. Nach den Regeln unter I. sind wir also berechtigt, den in (5) vorkommenden Rest $x$ bei unendlicher Verlängerung des Kettenbruches wegzulassen. Nach (4) ist aber der Werth des Kettenbruches (5) in

---

sein. Denn da wir $a_n > b_n$ und beide als ganze Zahlen voraussetzen, so mufs $a_n$ wenigstens um eine Einheit $> b_n$ sein. Wäre im ungünstigsten Falle $a_n = b_n + 1$, so wäre $\frac{b_n}{a_n - 1} = 1$, also die obige Ungleichung richtig; ist aber $a_n$ um mehr als eine Einheit von $b_n$ verschieden, so ist $\frac{b_n}{a_n - 1}$ ein ächter Bruch, also $q_{n-1}$ um so mehr gröfser als ein Theil von $q_{n-2}$, da es schon gröfser als das ganze $q_{n-2}$ vorausgesetzt wird. Aus jener Ungleichheit folgt nun $(a_n - 1)\, q_{n-1} > b_n q_{n-2}$ oder $a_n q_{n-1} - b_n q_{n-2} > q_{n-1}$, oder vermöge des Werthes der linken Seite $q_n > q_{n-1}$. Ist also $q_{n-1} > q_{n-2}$, so ist auch $q_n > q_{n-1}$. Man hat aber $q_1 = a_1$, $q_2 = a_1 a_2 - b_2$; ferner offenbar $a_1 a_2 > a_1 + a_2$, ausgenommen im Falle $a_1 = a_2 = 2$; da aber $a_2 > b_2$ ist, so hat man gewifs in jedem Falle $a_1 a_2 > a_1 + b_2$, oder $a_1 a_2 - b_2 > a_1$, d. h. $q_2 > q_1$. Nach dem vorher bewiesenen Satze folgt nun für $n = 3$ $q_3 > q_2$, dann für $n = 4$ $q_4 > q_3$ u. s. f., also überhaupt

$$q_1 < q_2 < q_3 < q_4 \cdots$$

Die Nenner der successiven Näherungsbrüche bilden mithin eine steigende Reihe, w. z. b. w.

Digitized by Google

jedem Falle, wie lang er auch sei, $= x$; da nun der Gränzwerth d Kettenbruches (5) von dem des Kettenbruches (6) nicht verschieden ist, haben wir auch

$$x = \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \cdots}}} \quad \textit{in inf.}$$

und vermöge des Werthes von $x$ aus (2)

$$-a \pm \sqrt{a^2 + b} = \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \cdots}}}$$

Hier ist noch zu entscheiden, welches Vorzeichen die Wurzel bekomm soll. Es erhellt aber auf den ersten Blick, dafs nur das Pluszeichen g braucht werden kann, da der Gränzwerth eines aus positiven Gliedern g bildeten Kettenbruches nicht negativ sein kann. Wir erhalten demnach

$$\sqrt{a^2 + b} = a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \cdots}}} \quad \textit{in inf.} \qquad (17)$$

Mittelst dieser Formel ist es sehr leicht, irrationale Wurzeln in Ketten brüche zu verwandeln; man hat hierzu weiter nichts nöthig, als die Zahl deren Wurzel gesucht wird, in zwei Theile zu zerlegen, von denen de eine ein Quadrat ist. Z. B. für $\sqrt{20}$ kann man $a = 3$, $b = 11$, oder $a = 4$, $b = 4$ nehmen, wodurch man erhält

$$\sqrt{20} = 3 + \cfrac{11}{6 + \cfrac{11}{6 + \cfrac{11}{6 + \cdots}}}$$

$$\sqrt{20} = 4 + \cfrac{4}{8 + \cfrac{4}{8 + \cfrac{4}{8 + \cdots}}}$$

Bei wirklicher Berechnung ist es natürlich vortheilhaft, für $a^2$ das gröfste in der gegebenen Zahl enthaltene Quadrat zu nehmen.

An der zweiten Form für $\sqrt{20}$ kann man die Richtigkeit des in §. 65 bewiesenen Theoremes erproben, aus der ersten dagegen erhellt,

Digitized by Google

dafs man den genannten Satz nicht etwa umkehren und sagen darf, wenn man schon weifs, dafs der Gränzwerth eines unendlichen Kettenbruches irrational ist, so müssen die einzelnen Glieder des letzteren ächte Brüche sein.

Wählt man $a$ und $b$ so, dafs $\sqrt{a^2+b}$ rational wird, so kann $2a$ nicht $> b$ sein, weil sonst der Gränzwerth des Kettenbruches gegen die Voraussetzung irrational sein müfste. Diefs sieht man auch leicht auf anderem Wege ein.

Die Formel (17) gilt übrigens nicht unbedingt für negative $b$, weil die Erlaubnifs zur Weglassung des Restes $x$ durch die Betrachtungen unter I. erwirkt wurde, welche alle $a$ und $b$ als wesentlich positiv voraussetzten.

Hätte man dagegen die Gleichung

$$x^2 - 2ax = -b \qquad (18)$$

durch Kettenbrüche aufzulösen, so stünde die Sache so. Algebraisch erhält man

$$x = a \pm \sqrt{a^2 - b} \qquad (19)$$

dagegen ist auch aus (18)

$$2ax - x^2 = b, \text{ oder } (2a - x)x = b$$

mithin

$$x = \frac{b}{2a - x}$$

Substituirt man für $x$ seinen Werth mehrmals nach einander, so hat man

$$x = \frac{b}{2a - \dfrac{b}{2a - x}}$$

$$x = \frac{b}{2a - \dfrac{b}{2a - \dfrac{b}{2a - x}}}$$

u. s. f.

Wir haben nun zu entscheiden, in welchen Fällen es hier erlaubt ist, bei unendlicher Fortsetzung des Kettenbruches den immer wiederkehrenden Rest $x$ wegzulassen. Nach den Untersuchungen unter II. mufs nun entweder $x$ sich der Null nähern, was hier nicht der Fall ist, oder der Kettenbruch mufs convergiren und $x$ von 1 verschieden sein. Da wir das Letztere allein brauchen können, so mufs $2a > b$ sein, weil wir nur in



Digitized by Google

diesem Falle der Convergenz sicher sind und zugleich mufs $x$, d. h. $a \pm \sqrt{a^2-b}$, von der Einheit verschieden sein. Aus der letzteren Bedingung folgt hier $\sqrt{a^2-b} \gtrless 1-a$ oder $2a \gtrless b+1$, mithin, weil nach dem Vorigen $2a$ nicht $<$ als $b+1$ sein kann, $2a > b+1$. Wir haben also, unter der Bedingung $2a > b+1$,

$$x = \cfrac{b}{2a - \cfrac{b}{2a - \cfrac{b}{2a - \ldots}}} \quad \textit{in inf.}$$

oder

$$a \pm \sqrt{a^2-b} = \cfrac{b}{2a - \cfrac{b}{2a - \cfrac{b}{2a - \ldots}}}$$

wo noch das Vorzeichen des Radikals bestimmt werden mufs. Diese Bestimmung ergiebt sich aus der Bemerkung, dafs der Gränzwerth des ganzen Kettenbruches ein ächter Bruch sein mufs, weil die einzelnen Glieder es sind. Es darf demnach nur das untere Zeichen gebraucht werden, und daraus folgt

$$\sqrt{a^2-b} = a - \cfrac{b}{2a - \cfrac{b}{2a - \cfrac{b}{2a - \ldots}}} \qquad (20)$$

wobei nach dem Früheren die Bedingung

$$2a > b+1$$

statt finden mufs.

Ist $2a = b+1$, so ist nach früheren Untersuchungen die Einheit die Gränze des Kettenbruches; da dieſs zufällig auch aus der Gleichung (20) folgt, so gilt nun dieselbe unter der Bedingung $2a \geqq b+1$.

Nimmt man aber $2a < b+1$, so kann man gar nicht mehr die Richtigkeit der Gleichung (20) behaupten; ja sie führt dann sogar auf Widersprüche, z. B. für $a = 3$, $b = 11$ würde herauskommen

$$\sqrt{-2} = 3 - \cfrac{11}{6 - \cfrac{11}{6 - \ldots}}$$

Rechts stehen aber nur reelle Gröfsen; Alles, was aus Subtraktionen und Divisionen mit diesen hervorgeht, mufs ebenfalls reell sein, gleichviel,

Digitized by Google

ie oft jene Rechnungsoperationen angewendet worden sind. Es müfste lso nach der obigen Gleichung eine unendliche Reihe von reellen Grö-sen — die Näherungsbrüche des Kettenbruches — sich einer unmögli-hen Zahl als Gränze nähern, was völlig absurd ist*).

## Capitel XVIII.

## Verwandlung von Reihen in Kettenbrüche.

### §. 67.

Verwandlung einer Reihe von sehr allgemeiner Form.

Es sei folgende Reihe

$$F(\alpha) = \frac{1}{f(\alpha)} - \frac{1}{f(\alpha+1)} + \frac{1}{f(\alpha+2)} - \cdots \qquad (1)$$

gegeben, in welcher $f(\alpha)$ eine so weit beliebige Funktion bedeutet, dafs die Reihe, ins Unendliche fortgesetzt, eine convergirende ist, deren Summe mit $F(\alpha)$ bezeichnet wird, und die Forderung gestellt, die Summe $F(\alpha)$ in Form eines Kettenbruches darzustellen. Man gelangt dazu durch folgende Betrachtungen:

Es folgt aus der Gleichung (1), wenn man $\alpha+1$ für $\alpha$ setzt,

$$F(\alpha+1) = \frac{1}{f(\alpha+1)} - \frac{1}{f(\alpha+2)} + \frac{1}{f(\alpha+3)} - \cdots \qquad (2)$$

und durch Addition der Gleichungen (1) und (2)

*) Man könnte sich hier ähnlich wie bei den divergenten Reihen dadurch helfen wollen, dafs man einen Unterschied zwischen der erzeugenden Funktion eines Kettenbruches und dessen Gränzwerthe machte, und den Kettenbruch als die Entwickelung der ersteren ansähe, für die man im obigen Falle $\sqrt{-2}$ zu nehmen hätte. Dann ist aber wenigstens Eines falsch, nämlich das Gleichheitszeichen. Zur Bezeichnung eines so unbestimmten Zusammenhanges wie der analytischen Entwickelung darf man nicht das ganz bestimmte, unzweideutige Identitätszeichen brauchen wollen; will man dagegen setzen

$$\sqrt{-2} \backsim 3 - \cfrac{11}{6 - \cfrac{11}{6 - \cdots}}$$

so kann Niemand etwas dagegen haben, aber mit dieser Weisheit ist auch gar nichts anzufangen.



Digitized by Google

$$F(\alpha) + F(\alpha+1) = \frac{1}{f(\alpha)} \qquad (3)^*)$$

Hieraus erhält man leicht

$$F(\alpha) = \frac{1 - f(\alpha)\,F(\alpha+1)}{f(\alpha)}$$

und

$$\frac{1}{F(\alpha)} = \frac{f(\alpha)}{1 - f(\alpha)\,F(\alpha+1)}$$

ferner

$$\frac{1}{F(\alpha)} - f(\alpha) = \frac{f(\alpha)^2\,F(\alpha+1)}{1 - f(\alpha)\,F(\alpha+1)} = \frac{f(\alpha)^2}{\frac{1}{F(\alpha+1)} - f(\alpha)}$$

*) Diese Folgerung würde unrichtig sein, wenn die Reihe (1) nicht convergirte. Bezeichnen wir nämlich mit $F'(\alpha)$ die Summe der $n$ ersten Glieder aus jener Reihe, so ist

$$F'(\alpha) = \frac{1}{f(\alpha)} - \frac{1}{f(\alpha+1)} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{f(\alpha+n-1)}$$

$$F'(\alpha+1) = \frac{1}{f(\alpha+1)} - \frac{1}{f(\alpha+2)} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{f(\alpha+n)}$$

und daraus folgt

$$F'(\alpha) + F'(\alpha+1) = \frac{1}{f(\alpha)} + \frac{(-1)^{n-1}}{f(\alpha+n)}$$

Ist nun die Reihe (1) convergent, so hat man $Lim\ F'(\alpha) = F(\alpha)$, $Lim\ F'(\alpha+1) = F(\alpha+1)$ und $Lim\ \frac{(-1)^{n-1}}{f(\alpha+n)} = 0$, und in diesem Falle erhält man durch Übergang zur Gränze für wachsende $n$ die Gleichung (3); divergirt dagegen die Reihe (1), so giebt es keine Gränzen für $F'(\alpha)$ und $F'(\alpha+1)$ und zugleich ist wegen des Zeichenwechsels $Lim\ \frac{(-1)^{n-1}}{f(\alpha+n)}$ von Null verschieden, darf also nicht weggelassen werden. Gleichwohl hat sich namentlich Euler dieſs erlaubt und glaubte hierdurch divergente Reihen in Kettenbrüche verwandelt und aus diesen die Summen jener abgeleitet zu haben. In der That aber hat er gar nicht die divergente Reihe, sondern diejenige Funktion in einen Kettenbruch transformirt, aus welcher man durch irgend eine Rechnungsoperation die divergente Reihe bei willkührlicher Wegwerfung des Restes entwickeln kann. Der erhaltene Kettenbruch steht dann zu der Reihe in demselben Verhältnisse, wie jene erzeugende Funktion, d. h. er ist der Reihe nicht gleich, sondern es findet blos eine gewisse oberflächliche, sehr unbestimmte Beziehung zwischen beiden Ausdrücken statt, aus welcher für die Zwecke der Analysis nicht der geringste Aufschluſs zu schöpfen ist.

Digitized by Google

Diefs läfst sich auch in folgender Form schreiben:

$$\frac{1}{F(\alpha)} - f(\alpha) = \frac{\overline{f(\alpha)}^2}{f(\alpha+1) - f(\alpha) + \frac{1}{F(\alpha+1)} - f(\alpha+1)} \quad (4)$$

Setzen wir hier

$$\frac{1}{F(\alpha)} - f(\alpha) = \psi(\alpha) \quad (5)$$

so ist

$$\frac{1}{F(\alpha+1)} - f(\alpha+1) = \psi(\alpha+1)$$

und wenn wir diese Gleichungen in (4) substituiren, so ergiebt sich

$$\psi(\alpha) = \frac{\overline{f(\alpha)}^2}{f(\alpha+1) - f(\alpha) + \psi(\alpha+1)}$$

Ebenso ist auch

$$\psi(\alpha+1) = \frac{\overline{f(\alpha+1)}^2}{f(\alpha+2) - f(\alpha+1) + \psi(\alpha+2)}$$

$$\psi(\alpha+2) = \frac{\overline{f(\alpha+2)}^2}{f(\alpha+3) - f(\alpha+2) + \psi(\alpha+3)}$$

. . . . . .

$$\psi(\alpha+n-1) = \frac{\overline{f(\alpha+n-1)}^2}{f(\alpha+n) - f(\alpha+n-1) + \psi(\alpha+n)}$$

Substituiren wir in jede dieser Gleichungen die darauf folgende, so ergiebt sich

$$\psi(\alpha) = \cfrac{\overline{f(\alpha)}^2}{f(\alpha+1) - f(\alpha) + \cfrac{\overline{f(\alpha+1)}^2}{f(\alpha+2) - f(\alpha+1) + \ddots + \cfrac{\overline{f(\alpha+n-1)}^2}{f(\alpha+n) - f(\alpha+n-1) + \psi(\alpha+n)}}}$$

Aus der Gleichung (5) folgt nun

$$F(\alpha) = \frac{1}{f(\alpha) + \psi(\alpha)}$$

mithin durch Einführung des für $\psi(\alpha)$ gefundenen Werthes

Digitized by Google

$$F(a) = \cfrac{1}{f(\alpha)+\cfrac{\overline{f(\alpha)}^2}{f(\alpha+1)-f(\alpha)+\cfrac{\overline{f(\alpha+1)}^2}{f(\alpha+2)-f(\alpha+1)+\ddots+\cfrac{\overline{f(\alpha+n-1)}^2}{f(\alpha+n)-f(\alpha+n-1)+\psi(\alpha+n)}}}} \tag{6}$$

Dieser Kettenbruch ist demnach auch gleich der in (1) aufgestellten unendlichen Reihe. Bezeichnen wir $f(\alpha)$, $f(\alpha+1)$, $f(\alpha+2)$, ... kurz mit $u_0, u_1, u_2, \ldots$ so ist jetzt

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{u_0}-\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_2}-\frac{1}{u_3}+\cdots \\ &= \cfrac{1}{u_0+\cfrac{(u_0)^2}{u_1-u_0+\cfrac{(u_1)^2}{u_2-u_1+\ddots+\cfrac{(u_{n-1})^2}{u_n-u_{n-1}+r_n}}}} \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

wobei nach (5)

$$r_n = \frac{1}{\frac{1}{u_n}-\frac{1}{u_{n+1}}+\frac{1}{u_{n+2}}-\cdots} - u^n \tag{8}$$

Es liegt hier der Gedanke sehr nahe, den Kettenbruch ins Unendliche fortzusetzen. Dazu haben wir uns vorerst nach §. 66, I. die Erlaubnifs auszuwirken, welche für die Fälle $Lim\,\frac{a_n}{r_n} = \infty$ oder $Lim\,\frac{a_n a_{n+1}}{b_{n+1}} > 0$ besteht. Die Entscheidung, unter welchen Umständen die erste Eigenschaft unserem Kettenbruche zukommt, würde hier, wo $r_n$ selbst in Form einer unendlichen Reihe erscheint, sich nur schwer mit besonderer Genauigkeit geben lassen*); wir halten uns daher an das zweite Criterium, welches in unserem Falle von leichter Anwendung ist. Nach demselben mufs

*) Durch die Bemerkung, dafs $\frac{1}{u_n}-\frac{1}{u_{n+1}}+\frac{1}{u_{n+2}}-\cdots < \frac{1}{u_n}$ und $> \frac{1}{u_n}-\frac{1}{u_{n+1}}$ ist, kann man zwar zwei Gränzen finden, zwischen denen $\frac{a_n}{r_n}$ liegt; diese sind aber so weit von einander, dafs sich aus ihnen die Fälle nicht absehen lassen, in welchen $Lim\,\frac{a_n}{r_n} = \infty$ wird.

Digitized by Google

$$Lim \frac{(u_n - u_{n-1})(u_{n+1} - u_n)}{(u_n)^2} > 0 \qquad (9)$$

sein, wenn wir den Kettenbruch ins Unendliche fortsetzen wollen, ohne auf den Rest $r_n$ Rücksicht zu nehmen. Die aufgestellte Bedingung wird aber erfüllt, wenn

$$Lim \frac{u_n - u_{n-1}}{u_n} > 0 \qquad (10)$$

ist. Denn man hat dann auch

$$Lim \frac{u_{n+1} - u_n}{u_{n+1}} > 0$$

und

$$Lim \frac{u_{n+1}}{u_n} \cdot \frac{u_{n+1} - u_n}{u_{n+1}} = Lim \frac{u_{n+1} - u_n}{u_n} > 0 \qquad (11)$$

weil vermöge der Convergenz der Reihe $u_{n+1} > u_n$ und folglich $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ ist und auch bei wachsenden $n$ nicht kleiner als die Einheit werden kann. Durch Multiplikation der beiden Ungleichungen (10) und (11) erhält man aber sogleich die Bedingung (9). Um nun die Ungleichheit (10) zu erfüllen, bringe man dieselbe in die Form

$$Lim \left(1 - \frac{u_{n-1}}{u_n}\right) > 0$$

es folgt dann daraus

$$Lim \frac{u_{n-1}}{u_n} < 1.$$

Wir haben demnach aus (7) für

$$Lim \frac{u_{n-1}}{u_n} < 1 \qquad (12)$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{u_0} - \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_3} + \cdots \\ &= \cfrac{1}{u_0 + \cfrac{(u_0)^2}{u_1 - u_0 + \cfrac{(u_1)^2}{u_2 - u_1 + \cfrac{(u_2)^2}{u_3 - u_2 + \cdots}}}} \quad in\ inf. \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

Ein passendes Beispiel bildet hier $u_0 = 2$, $u_1 = 4$, $u_2 = 8$ u. s. f., wodurch man einen unendlichen Kettenbruch erhält, dessen Gränzwerth $\frac{1}{3}$ ist.

Digitized by Google

Wollte man z. E. $u_0 = 1$, $u_1 = 3$, $u_2 = 5$, ... überhaupt $u_n = 2n + 1$ setzen und daraus folgern, dafs

$$\frac{\pi}{4} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1^2}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \ldots}}}} \qquad (14)^*)$$

sei, so würde man gar keine Garantie für die Richtigkeit des Resultates haben. Denn da hier die Bedingung (12) nicht erfüllt wird, indem

$$Lim \frac{2n-1}{2n+1} = Lim \frac{1 - \frac{1}{2n}}{1 + \frac{1}{2n}} = 1$$

ist, so ist hier die Weglassung des Restes $r_n$ in (7) ganz willkührlich und durch nichts motivirt. Da man sich also ganz aufser Stande befindet, den Einflufs zu beurtheilen, welchen diese Weglassung haben kann, so darf man auch gar nicht behaupten, dafs $\frac{\pi}{4}$ dem fraglichen Kettenbruche gleich, d. h. sein Gränzwerth sei. Diefs zeigt sich noch auffallender an der Thatsache, dafs man unendlich viele andere Brüche in denselben Kettenbruch verwandeln kann, sobald man hier ebenso willkührlich wie dort den Rest über Bord wirft. Nimmt man z. B. näherungsweis $\frac{22}{7}$ für $\pi$, also $\frac{11}{14}$ für $\frac{\pi}{4}$, so ist

$$\frac{11}{14} = \frac{1}{\frac{14}{11}} = \frac{1}{1 + \frac{3}{11}}$$

$$\frac{3}{11} = \frac{1^2}{\frac{11}{3}} = \frac{1^2}{2 + \frac{5}{3}}$$

$$\frac{5}{3} = \frac{3^2}{\frac{27}{5}} = \frac{3^2}{2 + \frac{17}{5}}$$

$$\frac{17}{5} = \frac{5^2}{\frac{125}{17}} = \frac{5^2}{2 + \frac{91}{17}}$$

u. s. f.

*) Diese Relation wurde zuerst von Lord Brounker gegeben.

Digitized by Google

Substituirt man in jede dieser Gleichungen die darauf folgende, so ergiebt sich bei willkührlicher Weglassung des Restes

$$\frac{11}{14} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1^2}{2+\cfrac{3^2}{2+\cfrac{5^2}{2+\ldots}}}} \qquad (15)$$

und dieses Resultat steht mit dem in (14) erhaltenen auf ganz gleicher Linie der Sicherheit oder vielmehr Unsicherheit. Die Auflösung des Widerspruchs, welcher darin zu liegen scheint, dafs der nämliche Kettenbruch zugleich die Werthe $\frac{\pi}{4}$ und $\frac{11}{14}$ haben soll, beruht ganz einfach auf dem Umstande, dafs der fragliche Kettenbruch ein divergenter ist, in welchem die Gränzwerthe der Näherungsbrüche gerader und ungerader Ordnung von einander verschieden sind. Alle zwischen $Lim\,\frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}}$ und $Lim\,\frac{p_{2n}}{q_{2n}}$ liegenden Brüche lassen sich bei willkührlicher Wegwerfung des Restes in jenen Kettenbruch verwandeln, aber man ist dann auch nicht berechtigt, einen solchen Bruch dem Kettenbruche gleich zu setzen, sondern man darf nur schreiben, wenn $\frac{b}{a}$ den umgewandelten Bruch bezeichnet,

$$Lim\,\frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}} > \frac{b}{a} > Lim\,\frac{p_{2n}}{q_{2n}}$$

was analytisch sehr wenig besagen will. Es sind daher Relationen wie (14) und (15) aus der Reihe der Gleichungen und der analytisch bedeutsamen Resultate überhaupt zu streichen.

## §. 68.

### Verwandlung einer anderen Reihe von allgemeiner Form.

Es sei

$$F(\alpha) = \frac{1}{f(\alpha)} - \frac{1}{f(\alpha)f(\alpha+1)} + \frac{1}{f(\alpha)f(\alpha+1)f(\alpha+2)} - \ldots \quad (1)$$

wobei die Reihe rechts als convergente vorausgesetzt wird und $F(\alpha)$ die in einen Kettenbruch zu verwandelnde Summe. Man hat hier auch

$$F(\alpha+1) = \frac{1}{f(\alpha+1)} - \frac{1}{f(\alpha+1)f(\alpha+2)} + \frac{1}{f(\alpha+1)f(\alpha+2)f(\alpha+3)} - \ldots$$

Digitized by Google

und wenn diese Gleichung mit $\frac{1}{f(\alpha)}$ multiplizirt und zu (1) addirt,

$$F(\alpha) + \frac{1}{f(\alpha)} F(\alpha+1) = \frac{1}{f(\alpha)} \qquad (2)^*)$$

oder

$$F(\alpha) = \frac{1 - F(\alpha+1)}{f(\alpha)}$$

Hieraus folgt der Reihe nach

$$\frac{1}{F(\alpha)} = \frac{f(\alpha)}{1 - F(\alpha+1)}$$

$$\frac{1}{F(\alpha)} - f(\alpha) = \frac{f(\alpha)\,F(\alpha+1)}{1 - F(\alpha+1)} = \frac{f(\alpha)}{\frac{1}{F(\alpha+1)} - 1}$$

oder auch

$$\frac{1}{F(\alpha)} - f(\alpha) = \frac{f(\alpha)}{f(\alpha+1) - 1 + \frac{1}{F(\alpha+1)} - f(\alpha+1)} \qquad (3)$$

Setzen wir zur Abkürzung

$$\frac{1}{F(\alpha)} - f(\alpha) = \psi(\alpha) \qquad (4)$$

so stellt sich die Gleichung (3) in folgende Form

$$\psi(\alpha) = \frac{f(\alpha)}{f(\alpha+1) - 1 + \psi(\alpha+1)} \qquad (5)$$

Hieraus folgt, wenn man der Reihe nach $\alpha+1$, $\alpha+2$, ... $\alpha+n-1$ für $\alpha$ setzt,

$$\psi(\alpha+1) = \frac{f(\alpha+1)}{f(\alpha+2) - 1 + \psi(\alpha+2)}$$

$$\psi(\alpha+2) = \frac{f(\alpha+2)}{f(\alpha+3) - 1 + \psi(\alpha+3)}$$

. . . . . .

$$\psi(\alpha+n-1) = \frac{f(\alpha+n-1)}{f(\alpha+n) - 1 + \psi(\alpha+n)}$$

Substituirt man in jede dieser Gleichungen die vorhergehende, so ergiebt sich aus (5)

---

*) Es gilt hier eine ähnliche Bemerkung wie zur Gleichung (3) im vorigen Paragraphen.

Digitized by Google

$$\psi(\alpha)=\cfrac{f(\alpha)}{f(\alpha+1)-1+\cfrac{f(\alpha+1)}{f(\alpha+2)-1+\cdots+\cfrac{f(\alpha+n-1)}{f(\alpha+n)-1+\psi(\alpha+n)}}}$$

und weil aus (4)

$$F(\alpha)=\frac{1}{f(\alpha)+\psi(\alpha)}$$

folgt,

$$F(\alpha)=\cfrac{1}{f(\alpha)+\cfrac{f(\alpha)}{f(\alpha+1)-1+\cfrac{f(\alpha+1)}{f(\alpha+2)-1+\cdots+\cfrac{f(\alpha+n-1)}{f(\alpha+n)-1+\psi(\alpha+n)}}}}$$

Bezeichnen wir kürzer $f(\alpha)$, $f(\alpha+1)$, $f(\alpha+2)$, ... mit $v_0$, $v_1$, $v_2$, ... und $\psi(\alpha+n)$ mit $\varrho_n$, so ist nach (1)

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{v_0}-\frac{1}{v_0v_1}+\frac{1}{v_0v_1v_2}-\frac{1}{v_0v_1v_2v_3}+\cdots\\ &=\cfrac{1}{v_0+\cfrac{v_0}{v_1-1+\cfrac{v_1}{v_2-1+\cdots+\cfrac{v_{n-1}}{v_n-1+\varrho_n}}}}\end{aligned}\right\}\quad(6)$$

$$\varrho_n=\cfrac{1}{\cfrac{1}{v_n}-\cfrac{1}{v_nv_{n+1}}+\cfrac{1}{v_nv_{n+1}v_{n+2}}-\cdots}-v_n\qquad(7)$$

Dieses Resultat läfst sich übrigens auch aus den Gleichungen (7) und (8) des vorigen Paragraphen ableiten, wenn man dort $u_0=v_0$, $u_1=v_0v_1$, $v_2=v_0v_1v_2$ u. s. f. setzt, dann in dem Kettenbruche so viel als möglich hebt, und zuletzt $\frac{r_n}{v_0v_1\cdots v_{n-1}}=\varrho_n$ setzt.

Man kann daher auch die Convergenz des vorliegenden Kettenbruches nach dem dort gegebenen Criterium beurtheilen und sich hierdurch die Erlaubnifs zur Weglassung des Restes verschaffen. Will man nämlich den vorliegenden Kettenbruch ins Unendliche fortsetzen, so mufs nach (12) in §. 67 $Lim\frac{v_0v_1v_2\cdots v_{n-1}}{v_0v_1v_2\cdots v_n}<1$, d. h. $Lim\frac{1}{v_n}<1$, oder $Lim\,v_n>1$ sein. Es ist daher für

$$Lim\,v_n>1\qquad(8)$$

Digitized by Google

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{v_0} - \frac{1}{v_0 v_1} + \frac{1}{v_0 v_1 v_2} - \frac{1}{v_0 v_1 v_2 v_3} + \cdots \\ &= \cfrac{1}{v_0 + \cfrac{v_0}{v_1 - 1 + \cfrac{v_1}{v_2 - 1 + \cfrac{v_2}{v_3 - 1 + \cdots \text{ in inf.}}}}} \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

ein durch seine Einfachheit sehr bemerkenswerthes Resultat.

Für $v_0 = 1$, $v_1 = 2$, $v_2 = 3$ u. s. f. erhält man z. B.

$$1 - \frac{1}{e} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{2}{2 + \cfrac{3}{3 + \cdots}}}} \quad (10)$$

und für $v_0 = 2$, $v_1 = 4$, $v_2 = 6$, $v_3 = 8$ u. s. f.

$$1 - \frac{1}{\sqrt{e}} = \cfrac{1}{2 + \cfrac{2}{3 + \cfrac{4}{5 + \cfrac{6}{7 + \cdots}}}} \quad (11)$$

## §. 69.

### Die Gaufsesche Reihe.

Eine Reihe von sehr allgemeiner Form, welche die meisten der in der algebraischen Analysis vorkommenden Reihen als spezielle Fälle in sich enthält, ist die folgende:

$$1 + \frac{\alpha\beta}{1 \cdot \gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1 \cdot 2 \cdot \gamma(\gamma+1)} x^2 + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \gamma(\gamma+1)(\gamma+2)} x^3 + \cdots$$

welche immer convergirt, wenn $x$ unter der Einheit liegt, aber auch für $x = 1$ in besonderen Fällen noch convergiren kann. Unter Voraussetzung ihrer Convergenz für den Fall, dafs sie ins Unendliche fortlaufen sollte, sei

$$F(\alpha, \beta, \gamma) = 1 + \frac{\alpha\beta}{1 \cdot \gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1 \cdot 2 \cdot \gamma(\gamma+1)} x^2 + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \gamma(\gamma+1)(\gamma+2)} x^3 + \cdots \quad (1)$$

Die Reihe selbst hat die merkwürdige Eigenschaft, dafs, wenn man von ihr eine ähnlich gebildete abzieht, der Rest wieder eine Reihe derselben Form bildet. Setzt man nämlich $\beta + 1$ und $\gamma + 1$ für $\beta$ und $\gamma$, so ist

Digitized by Google

$$F(\alpha,\ \beta+1,\ \gamma+1) =$$
$$1+\frac{\alpha(\beta+1)}{1.(\gamma+1)}x+\frac{\alpha(\alpha+1)(\beta+1)(\beta+2)}{1.2.(\gamma+1)(\gamma+2)}x^2+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)(\beta+1)(\beta+2)(\beta+3)}{1.2.3.(\gamma+1)(\gamma+2)(\gamma+3)}x^3+\ldots \quad (2)$$

und wenn man hiervon die Gleichung (1) abzieht, so ergiebt sich leicht

$$F(\alpha,\ \beta+1,\ \gamma+1) - F(\alpha,\ \beta,\ \gamma) =$$
$$\frac{\alpha(\gamma-\beta)x}{\gamma(\gamma+1)}\left[1+\frac{(\alpha+1)(\beta+1)}{1.(\gamma+2)}x+\frac{(\alpha+1)(\alpha+2)(\beta+1)(\beta+2)}{1.2.(\gamma+2)(\gamma+3)}x^2+\ldots\right]$$

d. i.

$$F(\alpha,\ \beta+1,\ \gamma+1) - F(\alpha,\ \beta,\ \gamma) = \frac{\alpha(\gamma-\beta)x}{\gamma(\gamma+1)}F(\alpha+1,\ \beta+1,\ \gamma+2) \quad (3)$$

Diese Eigenschaft läfst sich benutzen, um zunächst den Quotienten der Reihen (1) und (2) und dann die Reihe (2) oder (1) selbst in einen Kettenbruch zu verwandeln. Man erhält nämlich aus der Gleichung (3) durch Division mit $F(\alpha,\ \beta+1,\ \gamma+1)$ sehr leicht

$$1-\frac{F(\alpha,\ \beta,\ \gamma)}{F(\alpha,\ \beta+1,\ \gamma+1)} = \frac{\alpha(\gamma-\beta)x}{\gamma(\gamma+1)}\cdot\frac{1}{\dfrac{F(\alpha,\ \beta+1,\ \gamma+1)}{F(\alpha+1,\ \beta+1,\ \gamma+2)}} \quad (4)$$

Hier wollen wir der Kürze wegen

$$\frac{\alpha(\gamma-\beta)x}{\gamma(\gamma+1)} = f(\alpha,\ \beta,\ \gamma) \quad (5)$$

und

$$\frac{F(\alpha,\ \beta,\ \gamma)}{F(\alpha,\ \beta+1,\ \gamma+1)} = \psi(\alpha,\ \beta,\ \gamma) \quad (6)$$

setzen. Wollen wir durch Einführung dieser Abkürzungen die Gleichung (4) in die möglichst bequeme Form bringen, so wird es zuvörderst nöthig, den auf der rechten Seite dort vorkommenden Quotienten

$$\frac{F(\alpha,\ \beta+1,\ \gamma+1)}{F(\alpha+1,\ \beta+1,\ \gamma+2)}$$

ebenfalls durch die Funktion $\psi$ auszudrücken. Vertauschen wir zu diesem Zwecke die Gröfsen $\alpha$ und $\beta$ in der Gleichung (6), so erhalten wir

$$\psi(\beta,\ \alpha,\ \gamma) = \frac{F(\beta,\ \alpha,\ \gamma)}{F(\beta,\ \alpha+1,\ \gamma+1)} \quad (7)$$

Da nun aber die Gröfsen $\alpha$ und $\beta$ in $F(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ symmetrisch vorkommen, so kann man sie ihre Plätze wechseln lassen, ohne dafs $F(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ seinen Werth änderte. In der That ist

Digitized by Google

$$1 + \frac{\alpha\beta}{1\cdot\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\,\beta(\beta+1)}{1\cdot 2\cdot\gamma(\gamma+1)}x^2 + \cdots$$
$$= 1 + \frac{\beta\alpha}{1\cdot\gamma}x + \frac{\beta(\beta+1)\,\alpha(\alpha+1)}{1\cdot 2\cdot\gamma(\gamma+1)}x^2 + \cdots$$

d. h. $F(\alpha, \beta, \gamma) = F(\beta, \alpha, \gamma)$ und aus demselben Grunde hat man auch $F(\alpha+1, \beta, \gamma+1) = F(\beta, \alpha+1, \gamma+1)$. Unter Benutzung dieser Resultate geht die Gleichung (7) in die nachstehende über:

$$\psi(\beta, \alpha, \gamma) = \frac{F(\alpha, \beta, \gamma)}{F(\alpha+1, \beta, \gamma+1)}$$

aus welcher dadurch, dafs man $\beta+1$ und $\gamma+1$ für $\beta$ und $\gamma$ setzt, die folgende entspringt:

$$\psi(\beta+1, \alpha, \gamma+1) = \frac{F(\alpha, \beta+1, \gamma+1)}{F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+2)}$$

Der hier stehende Quotient ist aber derselbe, welcher auf der rechten Seite der Gleichung (4) vorkommt; substituiren wir also seinen Werth dort hinein, so ergiebt sich wegen der Abkürzungen in (5) und (6)

$$1 - \psi(\alpha, \beta, \gamma) = f(\alpha, \beta, \gamma)\,\frac{1}{\psi(\beta+1, \alpha, \gamma+1)}$$

oder

$$\psi(\alpha, \beta, \gamma) = 1 - \frac{f(\alpha, \beta, \gamma)}{\psi(\beta+1, \alpha, \gamma+1)} \qquad (8)$$

Setzt man hier für $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ der Reihe nach: $\beta+1$, $\alpha$, $\gamma+1$, so wird

$$\psi(\beta+1, \alpha, \gamma+1) = 1 - \frac{f(\beta+1, \alpha, \gamma+1)}{\psi(\alpha+1, \beta+1, \gamma+2)} \qquad (9)$$

Substituirt man ferner in (8) $\alpha+1$, $\beta+1$, $\gamma+2$ für $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, so ist

$$\psi(\alpha+1, \beta+1, \gamma+2) = 1 - \frac{f(\alpha+1, \beta+1, \gamma+2)}{\psi(\beta+2, \alpha+1, \gamma+3)} \qquad (10)$$

und wenn man für $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ in (8) der Reihe nach $\beta+2$, $\alpha+1$, $\gamma+3$ einführt,

$$\psi(\beta+2, \alpha+1, \gamma+3) = 1 - \frac{f(\beta+2, \alpha+1, \gamma+3)}{\psi(\alpha+2, \beta+2, \gamma+4)} \qquad (11)$$

Man kann auf diese Weise beliebig weit gehen.

Will man nach einer gefundenen Gleichung eine weitere bringen, so substituirt man in die Gleichung (8) für $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ der Reihe nach diejenigen Gröfsen und in der Ordnung, wie sie im Nenner auf der rechten Seite der schon gefundenen Gleichung hinter $\psi$ stehen. Ein paar allgemeine auf einander folgende Gleichungen dieser Art würden sein:

Digitized by Google

$$\psi(\alpha+n,\ \beta+n,\ \gamma+2n) = 1 - \frac{f(\alpha+n,\ \beta+n,\ \gamma+2n)}{\psi(\beta+n+1,\ \alpha+n,\ \gamma+2n+1)} \quad (12)$$

$$\psi(\beta+n+1,\ \alpha+n,\ \gamma+2n+1) = 1 - \frac{f(\beta+n+1,\ \alpha+n,\ \gamma+2n+1)}{\psi(\alpha+n+1,\ \beta+n+1,\ \gamma+2n+2)} \quad (13)$$

von welchen die erste als allgemeiner Typus für die Gleichungen (8) und (10), die zweite für (9) und (11) gilt.

Substituirt man in jede dieser Gleichungen die nächste, indem man bei (8) anfängt und etwa bei (12) aufhört, so wird

$$\psi(\alpha,\ \beta,\ \gamma) = 1 - \cfrac{f(\alpha,\ \beta,\ \gamma)}{1 - \cfrac{f(\beta+1,\ \alpha,\ \gamma+1)}{1 - \cfrac{f(\alpha+1,\ \beta+1,\ \gamma+2)}{1 - \cfrac{f(\beta+2,\ \alpha+1,\ \gamma+3)}{1 - \ddots - \cfrac{f(\alpha+n,\ \beta+n,\ \gamma+2n)}{\psi(\beta+n+1,\ \alpha+n,\ \gamma+2n+1)}}}}}$$

Vermöge der Bedeutung von $\psi(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ ist nun

$$\frac{F(\alpha,\ \beta+1,\ \gamma+1)}{F(\alpha,\ \beta,\ \gamma)} = \frac{1}{\psi(\alpha,\ \beta,\ \gamma)}$$

folglich

$$\left.\frac{F(\alpha,\ \beta+1,\ \gamma+1)}{F(\alpha,\ \beta,\ \gamma)}\right\} \quad (14)$$

$$= \cfrac{1}{1 - \cfrac{f(\alpha,\ \beta,\ \gamma)}{1 - \cfrac{f(\beta+1,\ \alpha,\ \gamma+1)}{1 - \cfrac{f(\alpha+1,\ \beta+1,\ \gamma+2)}{1 - \cfrac{f(\beta+2,\ \alpha+1,\ \gamma+3)}{1 - \ddots - \cfrac{f(\alpha+n,\ \beta+n,\ \gamma+2n)}{\psi(\beta+n+1,\ \alpha+n,\ \gamma+2n+1)}}}}}}$$

und dabei sind die verschiedenen Werthe der mit $f$ bezeichneten Funktion nach (5) folgende:

$$f(\alpha,\ \beta,\ \gamma) = \frac{\alpha\,(\gamma-\beta)}{\gamma\,(\gamma+1)}\,x$$

$$f(\beta+1,\ \alpha,\ \gamma+1) = \frac{(\beta+1)\,(\gamma+1-\alpha)}{(\gamma+1)\,(\gamma+2)}\,x$$

$$f(\alpha+1,\ \beta+1,\ \gamma+2) = \frac{(\alpha+1)\,(\gamma+1-\beta)}{(\gamma+2)\,(\gamma+3)}\,x$$

$$f(\beta+2,\ \alpha+1,\ \gamma+3) = \frac{(\beta+2)\,(\gamma+2-\alpha)}{(\gamma+3)\,(\gamma+4)}\,x$$

u. s. f.

deren Gesetz leicht zu übersehen ist.

Digitized by Google

Um nun den Kettenbruch (14) ins Unendliche fortsetzen zu können, ist zuvörderst noch eine Bemerkung nöthig. Der fragliche Kettenbruch steht unter der Form

$$\cfrac{1}{1-\cfrac{k_0}{1-\cfrac{k_1}{1-\cfrac{k_2}{1-\ddots-\cfrac{k_{2n}}{\varrho_{2n}}}}}}$$

$$=\cfrac{1}{1-\cfrac{k_0}{1-\cfrac{k_1}{1-\cfrac{k_2}{1-\ddots-\cfrac{k_{2n}}{1-(1-\varrho_{2n})}}}}}$$

Setzen wir hier $1-\varrho_{2n}=r_{2n}$, so geht der Kettenbruch ganz in die Form des Kettenbruches (7) in §. 66 über, und es ist gewifs erlaubt, den Rest $r_{2n}$ wegzulassen, wenn sich derselbe für wachsende $n$ unbegränzt Null nähert, d. h. wenn

$$Lim\ \varrho_{2n}=1$$

ist. Dieser glückliche Umstand findet aber in der That statt; es ist nämlich

$$\varrho_{2n}=\psi(\beta+n+1,\ \alpha+n,\ \gamma+2n+1)=\frac{F(\beta+n+1,\ \alpha+n,\ \gamma+2n+1)}{F(\beta+n+1,\ \alpha+n+1,\ \gamma+2n+2)}$$

$$=\frac{F(\alpha+n,\ \beta+n+1,\ \gamma+2n+1)}{F(\alpha+n+1,\ \beta+n+1,\ \gamma+2n+2)}$$

$$=\frac{1+\frac{(\alpha+n)(\beta+n+1)}{1\cdot(\gamma+2n+1)}x+\frac{(\alpha+n)(\alpha+n+1)(\beta+n+1)(\beta+n+2)}{1\cdot2\cdot(\gamma+2n+1)(\gamma+2n+2)}x^2+\cdots}{1+\frac{(\alpha+n+1)(\beta+n+1)}{1\cdot(\gamma+2n+2)}x+\frac{(\alpha+n+1)(\alpha+n+2)(\beta+n+1)(\beta+n+2)}{1\cdot2\cdot(\gamma+2n+2)(\gamma+2n+3)}x^2+\cdots}$$

Für wachsende $n$ ist aber

$$Lim\ \frac{\alpha+n}{\gamma+2n+1}=Lim\ \frac{\alpha+n+1}{\gamma+2n+2}$$

folglich auch

$$Lim\ \frac{(\alpha+n)(\beta+n+1)}{1\cdot(\gamma+2n+1)}x=Lim\ \frac{(\alpha+n+1)(\beta+n+1)}{1\cdot(\gamma+2n+2)}x$$

ferner ist

$$Lim\ \frac{\alpha+n}{\gamma+2n+1}=Lim\ \frac{\alpha+n+2}{\gamma+2n+3}$$

Digitized by Google

folglich auch

$$Lim \frac{(\alpha+n)(\alpha+n+1)(\beta+n+1)(\beta+n+2)}{1\,.\,2\,.\,(\gamma+2n+1)(\gamma+2n+2)} x^2$$
$$= Lim \frac{(\alpha+n+1)(\alpha+n+2)(\beta+n+1)(\beta+n+2)}{1\,.\,2\,.\,(\gamma+2n+2)(\gamma+2n+3)} x^2$$

u. s. f.

Ist überhaupt

$$\frac{F(\alpha+n,\ \beta+n+1,\ \gamma+2n+1)}{F(\alpha+n+1,\ \beta+n+1,\ \gamma+2n+2)} = \frac{1+U_1+U_2+U_3+U_4+\cdots}{1+V_1+V_2+V_3+V_4+\cdots}$$

so ist für wachsende $n$

$Lim\ U_1 = Lim\ V_1$, $Lim\ U_2 = Lim\ V_2$, $Lim\ U_3 = Lim\ V_3$ u. s. f.

mithin auch

$$Lim\ (1+U_1+U_2+U_3+U_4+\ldots) = Lim\ (1+V_1+V_2+V_3+V_4+\ldots)$$

oder

$$Lim \frac{1+U_1+U_2+U_3+\cdots}{1+V_1+V_2+V_3+\cdots} = 1$$

folglich

$$Lim\ \varrho_{2n} = Lim \frac{F(\alpha+n,\ \beta+n+1,\ \gamma+2n+1)}{F(\alpha+n+1,\ \beta+n+1,\ \gamma+2n+2)} = 1$$

Wir können also den Kettenbruch (14) ins Unendliche fortsetzen und haben dann vermöge der Werthe von $f$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{F(\alpha,\ \beta+1,\ \gamma+1)}{F(\alpha,\ \beta,\ \gamma)} \\ &= \cfrac{1}{1-\cfrac{\alpha(\gamma-\beta)x}{\gamma(\gamma+1)}} \\ &\qquad 1-\cfrac{\cfrac{(\beta+1)(\gamma+1-\alpha)x}{(\gamma+1)(\gamma+2)}}{1-\cfrac{(\alpha+1)(\gamma+1-\beta)x}{(\gamma+2)(\gamma+3)}} \\ &\qquad\qquad 1-\cfrac{\cfrac{(\beta+2)(\gamma+2-\alpha)x}{(\gamma+3)(\gamma+4)}}{1-\ldots\ldots} \end{aligned}\right\} (15)$$

und dieses Resultat ist so lange richtig, als die mit $F(\alpha,\ \beta+1,\ \gamma+1)$ und $F(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ bezeichneten Reihen convergiren.



Digitized by Google

Aus dieser sehr allgemeinen, zuerst von Gaufs entwickelten Relation lassen sich nun Kettenbrüche für die wichtigsten in der algebraischen Analysis vorkommenden Funktionen ableiten.

## §. 70.

### Kettenbrüche für einige der wichtigsten Funktionen.

I. Nehmen wir in Formel (15) $\beta = 0$, so wird $F(\alpha, \beta, \gamma) = 1$ und es bleibt der Zähler allein stehen, so dafs sich ergiebt:

$$1 + \frac{\alpha}{\gamma+1}x + \frac{\alpha(\alpha+1)}{(\gamma+1)(\gamma+2)}x^2 + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{(\gamma+1)(\gamma+2)(\gamma+3)}x^3 + \ldots \Big\} \quad (1)$$

$$= \cfrac{1}{1 - \cfrac{\frac{\alpha}{\gamma+1}x}{1 - \cfrac{\frac{1.(\gamma+1-\alpha)}{(\gamma+1)(\gamma+2)}x}{1 - \cfrac{\frac{(\alpha+1)(\gamma+1)}{(\gamma+2)(\gamma+3)}x}{1 - \cfrac{\frac{2.(\gamma+2-\alpha)}{(\gamma+3)(\gamma+4)}x}{1 - \ldots\ldots\ldots}}}}}$$

Spezielle Fälle hiervon sind: erstlich $\gamma = 0$, $\alpha = -\mu$, wodurch man links die Binomialreihe, und somit die Gleichung

$$(1-x)^{\mu} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{\frac{\mu}{1}x}{1 - \cfrac{\frac{1.(\mu+1)}{1.2}x}{1 + \cfrac{\frac{1.(\mu-1)}{2.3}x}{1 - \cfrac{\frac{2.(\mu+2)}{3.4}x}{1 + \cfrac{\frac{2.(\mu-2)}{4.5}x}{1 - \ldots\ldots}}}}}} \quad (2)$$

erhält, welche aber nur unter den Bedingungen gilt, unter denen die Binomialreihe convergirt; zweitens $\alpha = \beta = 1$ und dabei $x$ negativ genommen, woraus sich ergiebt:

Digitized by Google

$$1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{5}x^4-\ldots$$

$$=\cfrac{1}{1+\cfrac{\frac{1}{2}x}{1+\cfrac{\frac{1\cdot1}{2\cdot3}x}{1+\cfrac{\frac{2\cdot2}{3\cdot4}x}{1+\cfrac{\frac{2\cdot2}{4\cdot5}x}{1+\cfrac{\frac{3\cdot3}{5\cdot6}x}{1+\ldots}}}}}}$$

oder nach beiderseitiger Multiplikation mit $x$, für

$$+1 \geqq x > -1$$

$$l(1+x)=\cfrac{x}{1+\cfrac{\frac{1\cdot1}{1\cdot2}x}{1+\cfrac{\frac{1\cdot1}{2\cdot3}x}{1+\cfrac{\frac{2\cdot2}{3\cdot4}x}{1+\cfrac{\frac{2\cdot2}{4\cdot5}x}{1+\ldots}}}}} \qquad (3)$$

Aus dem Kettenbruche in (2) läfst sich auch noch ein anderer für $e^x$ ableiten. Setzt man nämlich $m$ für $\mu$ und $-\frac{x}{m}$ für $x$, so wird

$$\left(1+\frac{x}{m}\right)^m=\cfrac{1}{1-\cfrac{\frac{1}{1}x}{1+\cfrac{\frac{1}{2}\left(x+\frac{x}{m}\right)}{1-\cfrac{\frac{1}{2\cdot3}\left(x-\frac{x}{m}\right)}{1+\cfrac{\frac{2}{3\cdot4}\left(x+\frac{2x}{m}\right)}{1-\cfrac{\frac{2}{4\cdot5}\left(x-\frac{2x}{m}\right)}{1+\ldots..}}}}}}$$



Digitized by Google

und wenn man zur Gränze für unendlich wachsende $m$ übergeht:

$$e^x = \cfrac{1}{1-\cfrac{\frac{1}{1}x}{1+\cfrac{\frac{1}{2}x}{1-\cfrac{\frac{1}{2.3}x}{1+\cfrac{\frac{2}{3.4}x}{1-\cfrac{\frac{2}{4.5}x}{1+\cfrac{\frac{3}{5.6}x}{1-\cfrac{\frac{3}{6.7}x}{1+\ldots.}}}}}}}}$$

Schafft man hier der Reihe nach durch Hebung so viel Brüche als möglich weg, so geht die vorstehende Gleichung in die einfachere über:

$$e^x = \cfrac{1}{1-\cfrac{x}{1+\cfrac{x}{2-\cfrac{x}{3+\cfrac{x}{2-\cfrac{x}{5+\cfrac{x}{2-\cfrac{x}{7+\cfrac{x}{2-\ldots}}}}}}}}} \qquad (4)$$

wonach sich auch der Werth von $e$ näherungsweis berechnen liefse.

Nimmt man in der Gleichung (1) $\alpha = \gamma = \frac{1}{2}$ und setzt $x^2$ für $x$, so wird

$$1+\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{5}x^4+\frac{1}{7}x^6+\ldots = \cfrac{1}{1-\cfrac{1^2}{1.3}x^2}{1-\cfrac{2^2}{3.5}x^2}{1-\cfrac{3^2}{5.7}x^2}{1-\ldots.}$$

Digitized by Google

und wenn man beiderseits mit $x$ multiplizirt und im Kettenbruche die Brüche aus den Zählern und Nennern der einzelnen Glieder wegschafft, so ist für $x < 1$

$$\frac{1}{2} l \frac{1+x}{1-x} = \cfrac{x}{1-\cfrac{1^2x^2}{3-\cfrac{2^2x^2}{5-\cfrac{3^2x^2}{7-\cfrac{4^2x^2}{9-\ldots.}}}}} \qquad (5)$$

Setzt man hier $x\sqrt{-1}$ für $x$, so ergiebt sich

$$Arctan\, x = \cfrac{x}{1+\cfrac{1^2x^2}{3+\cfrac{2^2x^2}{5+\cfrac{3^2x^2}{7+\cfrac{4^2x^2}{9+\ldots.}}}}} \qquad (6)$$

woraus man z. B. für $x = 1$ findet

$$\frac{\pi}{4} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{4}{5+\cfrac{9}{7+\cfrac{16}{9+\ldots}}}}} \qquad (7)$$

ein durch sein Bildungsgesetz sehr merkwürdiger Kettenbruch.

II. Kehren wir wieder zu der Gleichung (15) in §. 69 zurück und setzen dort $\frac{x^2}{\alpha\beta}$ für $x$, so haben wir

$$F(\alpha, \beta, \gamma) = 1 + \frac{x^2}{1.\gamma} + \frac{\alpha(\alpha+1)\,\beta(\beta+1)\,x^4}{1.2.\gamma(\gamma+1)\,\alpha^2\beta^2} + \ldots$$

$$F(\alpha, \beta+1, \gamma+1) = 1 + \frac{(\beta+1)\,x^2}{1.\beta(\gamma+1)} + \frac{\alpha(\alpha+1)\,(\beta+1)(\beta+2)x^4}{1.2.(\gamma+1)(\gamma+2)\,\alpha^2\beta^2} + \ldots$$

Nehmen wir hier $\beta = \alpha$, lassen dann $\alpha$ ins Unendliche wachsen und nennen $U$ und $V$ die Gränzwerthe der Reihensummen für unendlich wachsende $\alpha$, so ist

$$U = 1 + \frac{x^2}{1.\gamma} + \frac{x^4}{1.2.\gamma(\gamma+1)} + \frac{x^6}{1.2.3.\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)} + \ldots \qquad (8)$$

$$V = 1 + \frac{x^2}{1.(\gamma+1)} + \frac{x^4}{1.2.(\gamma+1)(\gamma+2)} + \frac{x^6}{1.2.3.(\gamma+1)(\gamma+2)(\gamma+3)} + \ldots \qquad (9)$$

Digitized by Google

und wenn wir auch im Kettenbruche $\frac{x^2}{\alpha\beta}$ für $x$ setzen, darauf $\beta = \alpha$ ins Unendliche wachsen lassen,

$$\frac{V}{U} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{\frac{x^2}{\gamma(\gamma+1)}}{1 + \cfrac{\frac{x^2}{(\gamma+1)(\gamma+2)}}{1 + \cfrac{\frac{x^2}{(\gamma+2)(\gamma+3)}}{1 - \cdots\cdots}}}}$$

woraus nach Wegschaffung der Brüche folgt

$$\frac{V}{U} = \cfrac{1}{\gamma + \cfrac{x^2}{\gamma + 1 + \cfrac{x^2}{\gamma + 2 + \cfrac{x^2}{\gamma + 3 + \cdots}}}} \qquad (10)$$

Eine sehr wichtige Substitution ist hier $\gamma = \frac{1}{2}$ und $\frac{x}{2}$ für $x$. Man erhält durch dieselbe

$$U = 1 + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.2^2} + \frac{x^6}{1.2.3.3.5.2^3} + \cdots$$
$$= 1 + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \cdots$$

d. i.

$$U = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

ferner

$$V = 1 + \frac{x^2}{1.3.2} + \frac{x^4}{1.2.3.5.2^2} + \frac{x^6}{1.2.3.3.5.7.2^3} + \cdots$$
$$= 1 + \frac{x^2}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4.5} + \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6.7} + \cdots$$

oder

$$U = \frac{e^x - e^{-x}}{2x}$$

Setzt man auch in dem Kettenbruche $\gamma = \frac{1}{2}$ und $\frac{x}{2}$ für $x$, schafft die Brüche weg und substituirt für $U$ und $V$ die gefundenen Werthe, so wird

Digitized by Google

$$\frac{e^x - e^{-x}}{x\,(e^x + e^{-x})} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{x^2}{3 + \cfrac{x^2}{5 + \cfrac{x^2}{7 + \ldots}}}}$$

oder

$$\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \cfrac{x}{1 + \cfrac{x^2}{3 + \cfrac{x^2}{5 + \cfrac{x^2}{7 + \ldots}}}} \qquad (11)$$

Hieraus erhält man noch, wenn man $x\sqrt{-1}$ für $x$ nimmt,

$$tan\, x = \cfrac{x}{1 - \cfrac{x^2}{3 - \cfrac{x^2}{5 - \cfrac{x^2}{7 - \ldots}}}} \qquad (12)$$

Die letzten zwei Gleichungen sind besonders merkwürdig und bieten aufserdem noch durch ihre Form den Vortheil dar, dafs man mittelst des in §. 65 bewiesenen Theoremes über die irrationalen Werthe von $e^x$ und $tan\, x$ etwas Näheres aus ihnen erfahren kann.

## §. 71.

### Die Irrationalität der natürlichen Logarithmen und der Ludolph'schen Zahl.

I. Setzt man in der Gleichung (11) $x =$ einer rationalen Gröfse $\frac{m}{n}$, gleichviel ob gebrochen oder nicht, und bemerkt, dafs

$$\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = 1 - \frac{2}{e^{2x} + 1}$$

ist, so wird

$$1 - \frac{2}{e^{\frac{2m}{n}} + 1} = \cfrac{\frac{m}{n}}{1 + \cfrac{\left(\frac{m}{n}\right)^2}{3 + \cfrac{\left(\frac{m}{n}\right)^2}{5 + \cfrac{\left(\frac{m}{n}\right)^2}{7 + \ldots}}}}$$

Digitized by Google

woraus sich nach Wegschaffung der Brüche in den einzelnen Gliedern des Kettenbruches leicht die Relation

$$\frac{2}{\frac{2m}{e^n}+1} = 1 - \cfrac{m}{n+\cfrac{m^2}{3n+\cfrac{m^2}{5n+\cfrac{m^2}{7n+\ldots}}}} \qquad (1)$$

ergiebt. Da in dem Kettenbruche die Zähler der einzelnen Glieder immer $= m^2$ sind, die Nenner dagegen fortwährend wachsen, so mufs früher oder später in demselben eine Stelle kommen, von welcher aus, abwärts gerechnet, alle Glieder des noch folgenden Kettenbruches ächte Brüche sind. Der Gränzwerth eines solchen Kettenbruches ist nach §. 65 irrational, folglich ist es dann auch der Gränzwerth des in (1) stehenden Kettenbruches, weil jedenfalls ein Theil desselben irrational sein mufs. Hieraus folgt unmittelbar die Irrationalität der linken Seite in der Gleichung (1) und diefs führt zu dem Satze, dafs für jedes rationale $m$ und $n$ die Potenz $e^{\frac{m}{n}}$ irrational ist.

Nehmen wir einfacher $n = 1$, so entspringt der merkwürdige Satz, dafs alle ganzen Potenzen der Grundzahl der natürlichen Logarithmen irrationale Gröfsen sind. In der Gleichung $e^z = y$ ist daher $y$ irrational, wenn $z$ rational ist; soll aber $y$ rational werden, so mufs $z = log\, y$ irrational sein. Das natürliche Logarithmensystem hat also die merkwürdige Eigenschaft, dafs die Logarithmen aller rationalen Zahlen irrational sind, und hierdurch unterscheidet sich dasselbe wesentlich von allen anderen Systemen, die entweder rationale ganze Zahlen, oder algebraische Wurzeln aus solchen zu Grundzahlen haben, weil in jedem dieser möglichen Systeme rationale Zahlen vorkommen müssen, zu denen auch rationale Logarithmen gehören.

II. Setzt man in der Gleichung (12) des vorigen Paragraphen $x = \frac{m}{n}$, so ergiebt sich leicht

$$tan\,\frac{m}{n} = \cfrac{m}{n-\cfrac{m^2}{3n-\cfrac{m^2}{5n-\cfrac{m^2}{7n-\ldots}}}} \qquad (2)$$

Hier können ganz ähnliche Bemerkungen gemacht werden. Es mufs

Digitized by Google

nämlich irgend eine Stelle kommen, von welcher abwärts alle Glieder des noch folgenden Kettenbruches ächte Brüche sind; auch tritt hier der Fall nicht ein, dafs von irgendwo an der Kettenbruch die Form

$$\cfrac{m^2}{m^2+1-\cfrac{m^2}{m^2+1-\ldots}}$$

haben könnte, weil die Nenner $n$, $3n$, $5n$, $7n$ u. s. f. ins Unendliche wachsen. Bezeichnen also $m$ und $n$ rationale Zahlen, so ist nach §. 65 der Gränzwerth des Kettenbruches rechts irrational und mithin ist es auch die linke Seite; d. h. die Tangente eines Bogens, welcher zum Halbmesser in einem rationalen Verhältnisse steht, ist incommensurabel mit dem Halbmesser.

Hieraus folgt sehr leicht, dafs die Ludolph'sche Zahl $\pi$ eine Irrationalzahl ist. Nach §. 70 Formel (12) ist nämlich für $x = \frac{\pi}{4}$

$$1 = \cfrac{\frac{\pi}{4}}{1-\cfrac{\frac{\pi^2}{16}}{3-\cfrac{\frac{\pi^2}{16}}{5-\cfrac{\frac{\pi^2}{16}}{7-\ldots}}}}$$

Wäre nun $\frac{\pi}{4}$ gleich einem rationalen Bruche des Halbmessers, also $\frac{\pi}{4} = \frac{m}{n}$, so würde daraus folgen

$$1 = \cfrac{m}{1-\cfrac{\left(\frac{m}{n}\right)^2}{3-\cfrac{\left(\frac{m}{n}\right)^2}{5-\cfrac{\left(\frac{m}{n}\right)^2}{7-\ldots}}}} \qquad = \cfrac{m}{n-\cfrac{m^2}{3n-\cfrac{m^2}{5n-\cfrac{m^2}{7n-\ldots}}}}$$

Aber der Gränzwerth dieses Kettenbruches ist irrational und kann daher der rationalen Einheit nicht gleich sein. Daraus folgt, dafs die Voraus-

Digitized by Google

setzung $\frac{\pi}{4} = \frac{m}{n}$ falsch war und demnach $\frac{\pi}{4}$, mithin auch $\pi$ selbst, zum Halbmesser incommensurabel ist.

Man kann auch noch zeigen, dafs $\pi^2$ irrational ist. Aus Formel (12) §. 70 folgt nämlich vermöge der Relation $cot\, x = \frac{1}{tan\, x}$

$$x\, cot\, x = 1 - \cfrac{x^2}{3 - \cfrac{x^2}{5 - \cfrac{x^2}{7 - \ldots}}}$$

oder

$$1 - x\, cot\, x = \cfrac{x^2}{3 - \cfrac{x^2}{5 - \cfrac{x^2}{7 - \ldots}}}$$

und hieraus für $x = \frac{\pi}{2}$

$$1 = \cfrac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{3 - \cfrac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{5 - \cfrac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{7 - \ldots}}}$$

Wäre nun $\left(\frac{\pi}{2}\right)^2$ rational $= \frac{p}{q}$, so würde daraus folgen

$$1 = \cfrac{p}{3q - \cfrac{pq}{5q - \cfrac{pq}{7q - \ldots}}}$$

Der Gränzwerth dieses Kettenbruches ist aber irrational und kann nicht $= 1$ sein. Mithin ist auch $\left(\frac{\pi}{2}\right)^2$ nicht rational, d. h. $\pi^2$ irrational.

Digitized by Google

## Schlufsbetrachtung.

Überblicken wir das Ganze der bisher gewonnenen Resultate, so zeigt sich, dafs wir unsere im Anfange gestellte Aufgabe, die zur Erforschung der Natur der wichtigsten Funktionen

$$x^\alpha,\ a^x,\ log\ x,\ sin\ x,\ cos\ x,\ tan\ x,\ cot\ x,\ sec\ x,\ cosec\ x$$
$$Arcsin\ x,\ Arccos\ x,\ Arctan\ x,\ Arccot\ x$$

nöthigen Relationen aufzustellen, in einem Umfange gelöst haben, welcher im Einzelnen nichts zu wünschen übrig läfst. Wir sind im Stande, für jeden beliebigen Werth der Veränderlichen $x$ die entsprechenden Werthe jener Funktionen zu berechnen und ebenso haben wir in verschiedenen Sätzen über die Gränzwerthe gewisser Ausdrücke, z. B.

$$Lim\left(1+\frac{x}{m}\right)^m = e^x,\quad Lim\frac{a^\delta - 1}{\delta} = la \text{ u. s. f.}$$

und in den mannichfaltigen Gleichungen mit imaginären Gröfsen, z. E.

$$e^{xi} = cos\ x + i\ sin\ x,\quad \frac{1}{2i}l\left(\frac{1+xi}{1-xi}\right) = Arctan\ x \text{ u. s. f.}$$

Beziehungen kennen gelernt, welche den gegenseitigen Zusammenhang zwischen zwei anscheinend ganz verschiedenen Funktionen, wie Potenz und Exponenzialgröfse, Exponenzialgröfse und Sinus etc., aufdecken und gewissermafsen Übergangspunkte aus dem Bereiche der einen Funktion in den einer anderen bilden.

Für das erste dieser Resultate gilt noch eine interessante Bemerkung. Wir haben nämlich durch unsere Untersuchungen verschiedene Formen kennen gelernt, in denen sich der Werth einer Funktion für gegebene Werthe der in ihr enthaltenen Veränderlichen berechnen läfst; diese Formen sind: die Reihe, das Produkt und der Kettenbruch, welche alle entweder endlich oder unendlich sein können. Merkwürdig ist hierbei, dafs die genannten Formen genau den vier Spezies entsprechen; die Reihe repräsentirt die Addition und Subtraktion, indem sie durch successive Additionen, oder, wenn sie auch negative Glieder enthält, zugleich durch successive Subtraktionen gebildet wird; das Produkt stellt die continuirliche Multiplikation und der Kettenbruch die fortlaufende Division dar. Von diesen drei Instrumenten, mit welchen wir den inneren Organismus der Funktionen untersuchten, ist das erste zugleich das wichtigste, indem es den gröfsten Spielraum der Anwendbarkeit darbietet. Es hat selbst wie-

Digitized by Google

der zwei Unterarten, nämlich: Reihen, welche nach Potenzen der Hauptgröfse oder einer Funktion derselben fortschreiten, und solche, welche nach den Sinus oder Cosinus der Vielfachen eines Bogens fortgehen. Von der ersteren Art sind die Reihen:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots$$
$$a_1 \sin x + a_2 \sin^2 x + a_3 \sin^3 x + \ldots$$

oder überhaupt

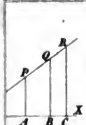
$$a_0 + a_1 \varphi(x) + a_2 \overline{\varphi(x)}^2 + a_3 \overline{\varphi(x)}^3 + \ldots$$

für die zweite gelten die Schemata:

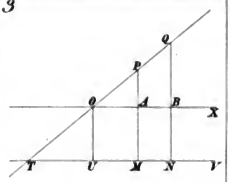
$$a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + a_3 \cos 3x + \ldots$$
$$a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + a_3 \sin 3x + \ldots$$

Es entstünde nun die Frage, nach welchem ganz allgemeinen Gesetze sich die Coeffizienten bilden müssen, wenn man eine beliebig gegebene Funktion $f(x)$ in eine solche Reihe verwandeln will, und welche Umstände noch statt finden müssen, wenn jene Verwandlung überhaupt möglich sein soll. Diese Frage wird uns unter Anderem die höhere Analysis beantworten, welche aufserdem noch den genannten drei Mitteln zur Untersuchung der Funktionen ein viertes zugesellt hat: das bestimmte Integral, den mächtigsten Hebel für diese Aufgaben, die galvanische Säule der Mathematik.

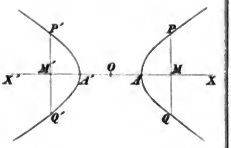
Digitized by Google

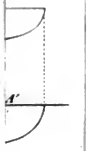



3

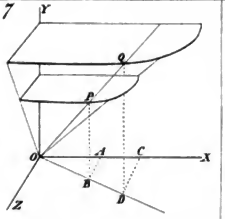



4

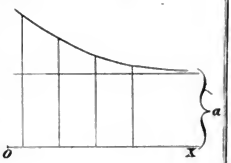


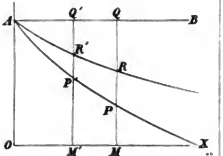

7



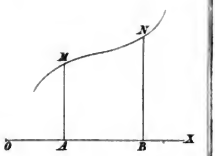

8



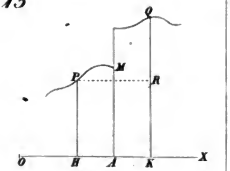
11



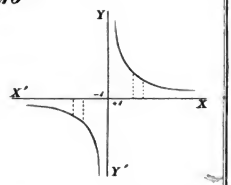

12



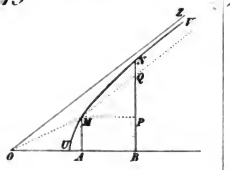
15



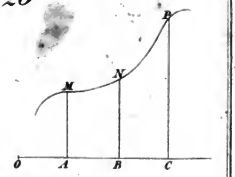

16



19

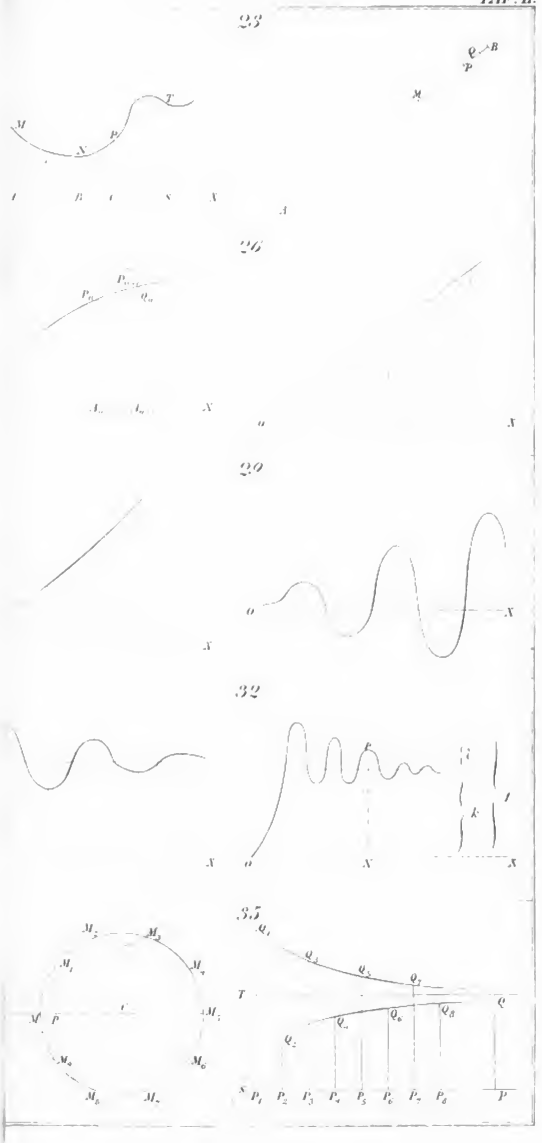



20




Digitized by Google

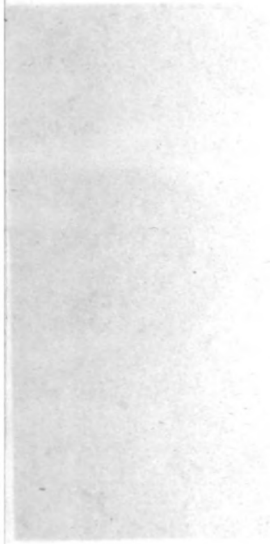
Digitized by Google




Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google



Digitized by Google

DEC 29 1936

Digitized by Google

Math 2668.45
Handbuch der mathematischen analysi
Cabot Science
003317392
3 2044 091 897 629